THÉORIE DES POINTS PROCHES SUR LES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

par **André WEIL** (CHICAGO)

Je me propose d'esquisser ici quelques-unes des idées de mon maître Nicolas BOURBAKI sur la théorie des points « proches » ou « infiniment voisins » sur les variétés différentiables. Cette théorie a une double source, d'une part le retour aux méthodes de Fermat dans le calcul infinitésimal du premier ordre et d'autre part, la théorie des jets développée dans ces dernières années par Ch. Ehresmann ; elle a pour but de fournir, pour le calcul différentiel d'ordre infinitésimal quelconque sur une variété, des moyens de calcul et des notations intrinsèques qui soient aussi bien adaptés à leur objet, et si possible, plus commodes que ceux du calcul tensoriel classique pour le premier ordre. Il serait tout à fait prématuré d'affirmer dès à présent que ce but soit près d'être atteint ; il est plus vraisemblable que de nouvelles recherches et bien des tâtonnements seront encore nécessaires ; aussi les indications que va donner le présent exposé doivent-elles être considérées comme provisoires, et destinées avant tout à provoquer des commentaires et des observations. Suivant l'usage, je remercie N. Bourbaki pour la communication de ses manuscrits inédits et pour de nombreuses conversations sur le sujet qui va être traité ici.

1. Par une ALGÈBRE LOCALE, on entendra une algèbre associative et commutative A sur le corps **R** des réels, de dimension finie sur **R**, possédant un élément unité et un idéal I tel que A/I soit de dimension 1 sur **R** et que $I^{m+1} = 0$ pour un entier m ; le plus petit m tel qu'il en soit ainsi s'appellera la hauteur de A. On identifiera le corps **R** des scalaires avec le sous-espace de A formé des multiples scalaires de l'élément unité, celui-ci étant noté 1 ; A est somme directe de ce sous-espace et de I, ce qui s'écrit $A = \mathbf{R} \oplus I$; I est l'unique idéal maximal de A. Si $a \in A$, le scalaire a_0 défini par $a \equiv a_0$ mod. I s'appelle la PARTIE FINIE de a ; A/I étant identifiée avec **R**, $a \rightarrow a_0$ est l'homomorphisme canonique de A sur $A/I = \mathbf{R}$.

Soit A une algèbre locale de hauteur m, d'idéal maximal I. Soit $P = P(X_1, \ldots, X_h)$ une série formelle en $X_1, \ldots, X_h$, à coefficients dans **R** ; soit $P_m = P_m(X_1, \ldots, X_h)$ le polynome de degré $\leqslant m$ somme des termes de degré $\leqslant m$ dans la série formelle P ; soient $i_1, \ldots, i_h$ des éléments de I ; par définition, l'élément

$P_m(i_1, \ldots, i_h)$ de A sera noté $P(i_1, \ldots, i_h)$. Il est immédiat que, si $i_1, \ldots, i_h$ sont donnés, l'application

$$P \longrightarrow P(i_1, \ldots, i_h)$$

est un homomorphisme dans A de l'algèbre des séries formelles en $X_1, \ldots, X_h$, à coefficients dans **R**, algèbre que pour abréger on conviendra de désigner par R_h. Par récurrence sur la hauteur m, on démontre aisément que c'est là un homomorphisme de R_h SUR A pourvu que les images de $i_1, \ldots, i_h$ dans l'espace vectoriel I/I^2 engendrent ce dernier espace. On appellera largeur de A la dimension de I/I^2 sur **R** ; si cette largeur est n, on voit donc que A est isomorphe à un quotient de R_n par un idéal de R_n. Réciproquement, il est immédiat que tout quotient de R_n par un idéal de codimension finie dans R_n, autre que R_n, est une algèbre locale de largeur $\leqslant$ n. Autrement dit, la notion d'algèbre locale coïncide avec la notion d'algèbre quotient, de dimension finie sur **R**, d'une algèbre de séries formelles sur **R**. En particulier, si I est l'idéal maximal de R_n formé des séries sans terme constant, le quotient R_n/I^{m+1} est une algèbre locale de hauteur m et de largeur n qui sera notée par $R_n^{(m)}$; on vérifie facilement que son groupe d'automorphismes est un groupe de Lie.

Soit A une algèbre locale de hauteur m ; toute sous-algèbre de A contenant 1 est une algèbre locale de hauteur $\leqslant$ m ; il en est de même de toute algèbre quotient de A. Soient A, B, deux algèbres locales, de hauteurs respectives, m, n, ayant respectivement pour idéaux maximaux I et J ; alors leur produit tensoriel $A \otimes B$ est une algèbre locale d'idéal maximal $A \otimes J + I \otimes B$, de hauteur $m + n$. On notera que la théorie des « jets » de Ch. Ehresmann équivaut au cas particulier de la théorie exposée ci-après qui s'obtiendrait en se restreignant à la seule considération des algèbres locales isomorphes à des algèbres $R_n^{(m)}$; cette restriction a le grave inconvénient que les sous-algèbres, les algèbres quotients, et (ce qui est essentiel dans la théorie du prolongement) les produits tensoriels d'algèbres de ce type ne sont plus des algèbres du même type.

2. Soit V une variété différentiable (dans tout ce qui suit, on convient de dire « différentiable » au lieu de « indéfiniment différentiable » ou autrement dit « de classe C^∞ » et même le plus souvent d'omettre ce qualificatif ; désignons par D (V) l'algèbre des fonctions numériques différentiables sur V. Soit x un point de V ; soit $I(x)$ l'idéal maximal de D (V) formé des fonctions nulles en x ; alors $I(x)^{m+1}$ est l'idéal de D (V) formé des fonctions qui s'annulent en x ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre $\leqslant$ m, c'est-à-dire qui ont en x un contact d'ordre m avec la constante 0 ; l'algèbre quotient $D(V)/I(x)^{m+1}$, qu'on désignera par $D^{(m)}(V\,;\,x)$, est une algèbre locale isomorphe à $R_n^{(m)}$ si n est la dimension de V ; on obtient un isomorphisme entre ces algèbres en choisissant sur V un système de coordonnées locales (une « carte ») au voisinage de x. On observera que le quotient de D (V) par l'idéal formé des fonctions qui s'annulent en x ainsi que TOUTES leurs dérivées est isomorphe à R_n ; autrement dit, il existe sur V des fonctions différentiables dont le développement (formel) de Taylor au point x est une série formelle ARBITRAIRE dans les coordonnées locales au point x ; mais nous n'aurons pas à faire usage de ce fait. Si x est donné, on pourrait, dans tout ce qu'on vient de dire, remplacer D (V) par l'algèbre des germes de fonctions différentiables en x sans qu'il y eût rien de changé.

DÉFINITION. — SOIT A UNE ALGÈBRE LOCALE. SOIENT V UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE, D (V) L'ALGÈBRE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES DIFFÉRENTIABLES SUR V, x UN POINT DE V. ON APPELLERA A-POINT DE V PROCHE DE x, OU POINT PROCHE (OU INFINIMENT VOISIN DE x D'ESPÈCE A SUR V TOUT HOMOMORPHISME DE D (V) DANS A TEL QUE LA PARTIE FINIE DE L'IMAGE DE f $\in$ D (V) DANS A SOIT f (x).

Si x' est un tel point, l'élément de A que x' associe à f $\in$ D (V) sera désigné, soit par f (x'), soit plus explicitement par l'une des notations suivantes :

$$A f(x') \quad , \quad A_x^{x'} f(x) \quad ;$$

dans cette dernière, x doit être considéré comme « variable liée ». Si I est l'idéal maximal de A, on a par définition f (x') $\equiv$ f (x) mod. I. L'image dans A, par l'homomorphisme f $\longrightarrow$ f (x'), de l'idéal I (x) des fonctions nulles en x est contenue dans I, donc l'image de I $(x)^{m+1}$ est contenue dans I^{m+1}, et est donc $\{0\}$ si A est de hauteur m. Autrement dit, tout A-point x' proche de x détermine si A est de hauteur m, un homomorphisme dans A de l'algèbre $D^{(m)}$ (V ; x), et réciproquement.

Si on écrit f (x') $=$ f (x) $+$ L (f), f $\longrightarrow$ L (f) est une application de D (V) dans I, linéaire sur **R** ; dire que f $\longrightarrow$ f (x') est un homomorphisme revient alors à dire que l'on a, quels que soient f, g :

$$L(fg) = L(f)g(x) + f(x)L(g) + L(f)L(g)$$

donc, réciproquement, toute application linéaire de D (V) dans I ayant cette propriété définit un A-point de V proche de x. En particulier, si A est de hauteur 1, on aura L (f) L (g) $=$ 0, et la relation ci-dessus se réduit à

$$L(fg) = L(f)\ g(x) + f(x)\ L(g)$$

Si, en particulier, I est de dimension 1, engendré par un élément τ satisfaisant à $\tau^2 = 0$ (A est alors l' « algèbre des nombres duaux »), on voit que la notion de A-point de V proche de x est identique à la notion de vecteur tangent à V en x. C'est là essentiellement le point de vue de Fermat dans ses travaux sur le calcul différentiel (Fermat employait la lettre o là où nous écrivons τ).

On notera que l'homomorphisme canonique de D (V) sur l'algèbre locale $D^{(m)}$ (V ; x) définit un point proche de x d'espèce $D^{(m)}$ (V ; x), dit POINT PROCHE DE x CANONIQUE DE RANG m.

Si on prend pour V la droite numérique **R**, et que x' soit un A-point de **R** proche de x $\in$ **R**, x' est complètement déterminé par la connaissance de l'élément ι (x') de A que x' associe à l'application identique ι de **R** sur **R** considérée comme élément de D (**R**). On conviendra d'identifier x' avec l'élément ι (x') de A.

Si φ est une application différentiable d'une variété V dans une variété W, g $\longrightarrow$ g o φ est un homomorphisme de D (W) dans D (V) ; composant celui-ci avec l'homomorphisme de D (V) dans A qui définit un A-point x' de V proche de $x \in V$, on obtient un A-point de W proche de $\varphi(x)$, qu'on notera $\varphi(x')$, ou plus explicitement $A\varphi(x')$.

3. On peut, d'une manière « évidente », définir une structure de variété différentiable, et plus précisément de variété différentiable fibrée de base V, sur l'ensemble des A-points de V proches de points de V, A étant une algèbre locale donnée ; muni de cette structure, l'ensemble en question s'appellera LE PROLONGEMENT DE V D'ESPÈCE A et se notera A_V. Plus généralement, supposons qu'on se donne une variété fibrée de base V, dont les fibres soient des algèbres isomorphes à une algèbre locale fixe A ; si $A(x)$ est la fibre appartenant à $x \in V$, considérons l'ensemble des $A(x)$-points de V proches de x ; la réunion de ces ensembles, quand x décrit V, pourra encore être munie d'une structure de variété fibrée de base V, et s'appellera encore un prolongement de V.

Si U et V sont des variétés, on vérifie immédiatement que le prolongement d'espèce A de la variété produit $U \times V$ s'identifie canoniquement au produit des prolongements d'espèce A de U et de V :

$$^{A}(U \times V) = {}^{A}U \times {}^{A}V$$

Soit φ une application d'une variété V dans une variété W ; si $x' \in {}^{A}V$, c'est-à-dire si x' est un A-point de V proche d'un point x de V, on a défini plus haut le point ${}^{A}\varphi(x')$, qu'on peut écrire aussi $\varphi(x')$, comme un A-point de W proche de $\varphi(x)$. On vérifie que $x' \rightarrow {}^{A}\varphi(x')$ est une application différentiable de ${}^{A}V$ dans ${}^{A}W$, qui s'appelle le A-prolongement de φ ; elle se note ${}^{A}\varphi$ (ou simplement φ par abus de langage quand aucune confusion n'est à craindre).

On notera que, quelle que soit l'algèbre locale A, on a convenu de considérer **R** comme plongée dans A, et que, dans ces conditions, si $x \in V$, l'application $f \rightarrow f(x)$ de $D(V)$ dans $\mathbf{R} \subset A$ définit un A-point de V proche de x, qu'on identifiera toujours avec x ; de cette manière V se trouve identifiée avec une sous-variété de ${}^{A}V$. Si W est aussi une variété, elle sera de même identifiée avec une sous-variété de ${}^{A}W$; et, si φ est une application de V dans W, il est immédiat que ${}^{A}\varphi$ induit sur V, considérée comme sous-variété de ${}^{A}V$, l'application φ de V sur W considérée comme sous-variété de ${}^{A}W$.

4. Soit, par exemple, $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ une loi de composition interne définie sur une variété V, c'est-à-dire une application de $V \times V$ dans V ; son prolongement ${}^{A}f$ est une application de ${}^{A}V \times {}^{A}V$ dans ${}^{A}V$, c'est-à-dire une loi de composition sur ${}^{A}V$; il est immédiat que, si f est associative (resp. commutative), il en est de même de ${}^{A}f$. Si V est un groupe de Lie, le prolongement de ${}^{A}V$ de la loi de composition sur V fait de ${}^{A}V$ un groupe de Lie. Si V est la droite numérique munie de sa structure de corps, on peut prolonger à ${}^{A}V$ les lois de composition additive et multiplicative de V ; mais on a vu que dans ce cas ${}^{A}V$ s'identifie avec l'algèbre A ; on vérifie immédiatement que les lois ainsi obtenues sur ${}^{A}V$ ne sont autres que l'addition et la multiplication de l'algèbre A.

Supposons qu'on prenne pour V un espace vectoriel (de dimension finie) sur **R**. Le prolongement à ${}^{A}V$ de l'addition des vecteurs dans V détermine sur ${}^{A}V$ une structure de groupe abélien ; d'autre part, on peut prolonger à

$$^{A}(\mathbf{R} \times V) = {}^{A}\mathbf{R} \times {}^{A}V = A \times {}^{A}V$$

l'application $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ de $\mathbf{R} \times V$ dans V. Au moyen de ces deux lois, on définit sur ${}^{A}V$ une structure de A-module ; on vérifie facilement (par exemple au moyen d'une base de V) que ce module s'identifie canoniquement avec le produit tensoriel $A \otimes V$ considéré comme A-module. Si de plus on s'est donné sur V une multiplication qui fasse de V une algèbre commutative sur $\mathbf{R}$, le prolongement de cette loi à ${}^{A}V$ détermine sur ${}^{A}V$, avec les lois précédentes, une structure d'algèbre sur A pour laquelle ${}^{A}V$ s'identifie encore canoniquement avec $A \otimes V$ muni de la structure correspondante.

5. On est alors en état de démontrer le théorème fondamental de TRANSITIVITÉ DES PROLONGEMENTS sous la forme précise suivante :

THÉORÈME. — SOIENT A ET B DEUX ALGÈBRES LOCALES, V UNE VARIÉTÉ. IL EXISTE UN ISOMORPHISME CANONIQUE ENTRE LE PROLONGEMENT D'ESPÈCE $A \otimes B$ DE V ET LE PROLONGEMENT D'ESPÈCE A DU PROLONGEMENT D'ESPÈCE B DE V.

Soit en effet $f \in D(V)$; f se prolonge en une application ${}^{B}f$ de ${}^{B}V$ dans ${}^{B}\mathbf{R} = B$, puis celle-ci en une application ${}^{A}({}^{B}f)$ de ${}^{A}({}^{B}V)$ dans ${}^{A}B = A \otimes B$; si $x'' \in {}^{A}({}^{B}V)$, ${}^{A}({}^{B}f)(x'')$ est donc un élément de $A \otimes B$. Remontant aux définitions, on voit immédiatement que, si x'' est donné, $f \longrightarrow {}^{A}({}^{B}f)(x'')$ est un homomorphisme de D (V) dans $A \otimes B$; de plus, si x'' est proche de $x' \in {}^{B}V$ et x' proche de $x \in V$, la partie finie de ${}^{A}({}^{B}f)(x'')$, considérée comme élément de l'algèbre locale $A \otimes B$, est f ('x) ; l'homomorphisme en question définit donc un $(A \otimes B)$ -point z' proche de x sur V ; et $x'' \longrightarrow z'$ est, dans ces conditions, une application canonique de ${}^{A}({}^{B}V)$ dans le prolongement de V d'espèce $A \otimes B$. Reste à montrer que cette application est un isomorphisme de la première variété sur la seconde ; comme c'est là une propriété purement locale par rapport à la base V, il suffit de la vérifier lorsque V est une partie ouverte d'un espace vectoriel E ; mais, en ce cas, elle résulte immédiatement des isomorphismes précédemment établis entre ${}^{A}({}^{B}E)$ et $A \otimes (B \otimes E)$, d'une part, et entre le $(A \otimes B)$ -prolongement de E et $(A \otimes B \otimes E)$, d'autre part, et de l'associativité du produit tensoriel.

6. La notion classique de transformation infinitésimale se généralise ici comme suit. Si A est une algèbre locale, et V une variété, une transformation infinitésimale d'espèce A sur V sera, au sens de la théorie des espaces fibrés, une section (différentiable) de la variété fibrée ${}^{A}V$ de base V, ou autrement dit une application différentiable de V dans son prolongement ${}^{A}V$ qui, à tout point x sur V, fasse correspondre un A-point x' proche de x sur V. Si A est l'algèbre des nombres duaux (n° 2), la connaissance de x' équivaut à celle d'un vecteur tangent à V en x, et on retrouve la notion classique.

Plus généralement, une A-application d'une variété V dans une variété W sera une application F de V dans ${}^{A}W$; si, pour $x \in V$, f (x) est le point de W dont F (x) est proche, on dira que F est proche de l'application f de V dans W. Une transformation infinitésimale est donc une A-application proche de l'application identique.

Soient U, V, W des variétés ; soient F une A-application de U dans V, et G une A-application de V dans W. Alors ${}^{A}G \circ F$ est une $(A \otimes A)$ -application de U dans W, qui fait donc correspondre à tout $x \in U$ un $(A \otimes A)$-point de W. Mais l'algèbre $A \otimes A$ admet un homomorphisme canonique sur A, donné par $a \otimes a' \rightarrow aa'$; si on le désigne par σ, le composé de cet homomorphisme avec l'homomorphisme définissant un $(A \otimes A)$-point w' de W proche de $w \in W$ définira un A-point de W proche de w, qu'on notera $\sigma_w w'$, ou, s'il n'y a pas de confusion à craindre, $\sigma w'$ (plus généralement, si λ est un homomorphisme d'une algèbre locale A dans une algèbre locale B, le composé de λ et d'un A-point x' d'une variété X est un B-point de X noté $\lambda_X x'$ ou $\lambda x'$, dit « spécialisé de x' par λ"). Cela étant, $\sigma_W \circ {}^A G \circ F$ est une A-application de U dans W, dite composée de G et de F, qu'on notera $G * F$; si G et F sont respectivement proches d'applications g de V dans W et f de U dans V, $G * F$ est proche de $g \circ f$; en particulier, si F et G sont des transformations infinitésimales d'espèce A d'une variété V, il en est de même de leur composée $G * F$. On vérifie facilement que la loi de composition qu'on vient de définir entre A-applications est associative.

7. Soient U, V, X des variétés, A une algèbre locale, e un point de X, e' un A-point de X proche de e. Soit Ω un voisinage de $U \times \{e\}$ dans $U \times X$; soit f une application de Ω dans V. Posons, pour tout $u \in U$:

$$F(u) = A_x^{e'} f(u,x) \quad ;$$

c'est là un A-point de V proche de $f(u, e)$, et F est donc une A-application de U dans V proche de l'application f_e définie par $f_e(u) = f(u, e)$; on peut dire que F est obtenue à partir de f par passage du fini à l'infiniment petit.

Lorsque A est l'algèbre des nombres duaux, on peut montrer, au moyen de la théorie des équations différentielles, que toute transformation infinitésimale d'espèce A peut être ainsi obtenue par « passage du fini à l'infiniment petit » ; il serait intéressant de savoir si ce résultat reste valable pour toute algèbre locale A. Mais il est facile en tout cas de montrer qu'il subsiste localement c'est-à-dire que la restriction à un voisinage suffisamment petit d'un point de V d'une transformation infinitésimale d'espèce A arbitrairement donnée sur V peut être obtenue par passage du fini à l'infiniment petit. Cela donne un moyen commode de démontrer des théorèmes de caractère local sur les transformations infinitésimales, et en particulier, l'important résultat suivant :

Théorème. — LES TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES D'ESPÈCE DONNÉE A SUR UNE VARIÉTÉ V FORMENT UN GROUPE POUR LA LOI DE COMPOSITION $(G, F) \rightarrow G * F$.

Le même résultat est d'ailleurs susceptible d'une démonstration plus « intrinsèque » (ou, si l'on veut, plus algébrique), ne faisant pas appel au passage du fini à l'infiniment petit.

8. Il est bien connu que, dans la théorie classique, un champ de vecteurs X (ou « transformation infinitésimale » au sens classique) sur une variété V permet de définir comme suit un opérateur θ_X opérant sur les champs de tenseurs, ou beaucoup plus généralement sur tout « être géométrique » défini sur V, à valeurs dans un espace vectoriel. Soit $(x, t) \rightarrow f(x, t)$ une application de $V \times \mathbf{R}$ dans V, telle que $f(x, 0) = x$ et $(\partial f / \partial t)_{t=0} = X(x)$ quel que soit x ;

par exemple, on pourra prendre pour f la solution du système différentiel défini sur V par le champ X. Soit par exemple U un champ de tenseurs sur V ; soit U_t son transformé par $x \to f_t(x) = f(t, x)$, cette dernière application étant (du moins localement au voisinage d'un point x donné) un homéomorphisme local, différentiable ainsi que son réciproque, dès que t est assez voisin de O ; on posera dans ces conditions $\theta_X U = (\partial U_t / \partial t)_{t=0}$. Si, par exemple, U est aussi un champ de vecteurs, on obtient ainsi la définition du crochet $[X, U]$.

Ces opérations se généralisent aux transformations infinitésimales d'espèce quelconque. On constate que celles-ci opèrent d'une manière « naturelle » sur tout espace fibré défini d'une manière intrinsèque à partir de la variété de base. D'une manière précise, ces espaces fibrés sont définis comme suit. Soit V une variété de dimension n ; $R_n^{(m)}$ étant l'algèbre locale définie au n° 1, un point d'espèce $R_n^{(m)}$ de V, proche de $x \in V$, est (n° 2) un homomorphisme de $D^{(m)}(V ; x)$ dans $R_n^{(m)}$; si cet homomorphisme est un isomorphisme de $D^{(m)}(V ; x)$ sur $R_n^{(m)}$, le point en question s'appellera un REPÈRE D'ORDRE m EN X SUR V. L'espace des repères d'ordre m sur V apparaît ainsi comme partie ouverte du prolongement d'espèce $R_n^{(m)}$ de V. Mais, sur cet espace, on peut définir une structure d'espace fibré principal de base V, le groupe étant le groupe de Lie des automorphismes de l'algèbre $R_n^{(m)}$; muni de cette structure, cet espace sera noté $P^{(m)}(V)$. Tout espace fibré de base V associé à un espace principal $P^{(m)}(V)$ pour un m convenable sera dit CANONIQUEMENT ATTACHÉ A V (ces espaces sont les « prolongements » de V au sens d'Ehresmann). C'est sur ces espaces qu'opèrent « naturellement » les transformations infinitésimales. La définition de $P^{(m)}(V)$ comme partie ouverte du prolongement de V d'espèce $R_n^{(m)}$ permet d'appliquer commodément les principes introduits ci-dessus à l'étude de ces opérateurs. Il est impossible d'entrer ici dans le détail des résultats déjà obtenus, dont certains sont de démonstration assez difficile. Indiquons simplement que les notions ci-dessus permettent de faire apparaître, par exemple, le crochet des champs de vecteurs comme un cas particulier de la formation du commutateur, les propriétés formelles du premier se déduisant donc directement de celles du second. En particulier, l'application à la théorie des groupes de Lie permet de donner une forme naturelle aux relations entre commutateur et crochet, où l'on n'a plus à faire intervenir les « coordonnées canoniques ». D'autre part, la notion de « connexion » se définit tout naturellement dans le cadre de la présente théorie, et donne lieu à des généralisations dont il serait prématuré d'essayer d'apprécier l'importance.