Bull. Sciences math., 2e série
90, 1966, p. 41 à 64.

SUR LA CATÉGORIE DES ALGÈBRES DE VON NEUMANN ;

PAR

ALAIN GUICHARDET.

On se propose dans ce travail d'étudier systématiquement un certain nombre d'opérations relatives aux algèbres de von Neumann, du point de vue de la catégorie des dites algèbres où l'on prend comme morphismes les morphismes normaux (*voir* définition au paragraphe 1) : produits, sommes, limites projectives et inductives, produits tensoriels; pour certaines de ces opérations on examine en détails les propriétés du foncteur obtenu; par exemple on verra au paragraphe 7 que le foncteur $\varinjlim$ n'est en général pas exact à gauche; d'une façon plus concrète, une algèbre de von Neumann A, engendrée par une suite croissante de sous-algèbres de von Neumann A_i, n'est en général pas la limite inductive des A_i. En ce qui concerne les produits tensoriels, on a été amené à introduire une nouvelle notion, comme solution d'un problème universel, qui diffère de la notion classique à peu près comme, dans le cas des espaces de Banach, le produit tensoriel $\hat{\otimes}_\pi$ diffère de $\hat{\otimes}_\varepsilon$ ou comme, dans le cas des C^*-algèbres $\overset{\vee}{\otimes}$ diffère de $\overset{*}{\otimes}$ (sur ce point, *voir* [7]); cependant la situation présente est bien différente de celle des C^*-algèbres, puisqu'ici il est relativement aisé de caractériser les objets « plats » (*cf.* prop. 8.6), alors que dans le cas des C^*-algèbres on ne sait pas encore s'il existe des objets non plats. On étudie pour terminer le foncteur qui associe à toute C^*-algèbre son algèbre de von Neumann enveloppante.

Pour tout ce qui concerne la théorie des catégories — terminologie et résultats — on s'est basé sur le cours récemment paru de G. POITOU et P. JAFFARD ([9]).

§ 1. Rappels concernant les algèbres de von Neumann.

On définit habituellement une algèbre de von Neumann comme étant une algèbre d'opérateurs dans un espace hilbertien, autoadjointe et égale à son bicommutant; ou encore autoadjointe, contenant l'opérateur 1 et fermée pour l'une quelconque des topologies forte, faible, ultra-forte et ultra-faible ([2], p. 44). Mais on peut aussi caractériser intrinsèquement les algèbres de von Neumann de la façon suivante : une algèbre de von Neumann est une algèbre de Banach A, à unité, munie d'une involution et vérifiant les axiomes suivants :

(i) $\| a a^* \| = \| a \|^2$ pour tout $a \in A$ (on dit alors que A est une C^*-algèbre à unité);

(ii) dans l'ensemble A^+ des éléments positifs de A, toute famille filtrante majorée admet une borne supérieure;

(iii) pour tout élément non nul a de A il existe une forme linéaire positive normale f sur A telle que $f(a) \neq 0$ [« normale » signifie qu'on a $f(\sup x_i) = \sup f(x_i)$ pour toute famille filtrante majorée (x_i) d'éléments de A^+].

(*Voir*, sur ce point, [14].)

Toute algèbre de von Neumann dans un espace hilbertien, définie comme au début du paragraphe, sera appelée une *réalisation* de l'algèbre de von Neumann abstraite correspondante; et l'expression « algèbre de von Neumann » désignera une algèbre abstraite vérifiant les axiomes (i), (ii) et (iii). Si A est une algèbre de von Neumann, la topologie ultra-faible sur A qu'on peut définir à partir d'une réalisation est en fait indépendante de la réalisation choisie ([2], p. 57) et peut être définie intrinsèquement comme étant la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires positives normales ([2], p. 54); pour cette topologie, la multiplication est séparément continue et l'involution est continue ([2], p. 36). (Signalons que la topologie ultra-forte est elle aussi intrinsèque et susceptible d'une définition faisant intervenir les formes linéaires positives normales.) Pour toute famille filtrante majorée (x_i) d'éléments de A^+, $\sup x_i$ est limite ultra-faible des x_i suivant le filtre des sections ([2], p. 331). Tout isomorphisme d'algèbres involutives d'une algèbre de von Neumann sur une autre est isométrique et en outre bicontinu pour les topologies ultra-faibles.

Si A est une algèbre de von Neumann, toute sous-algèbre autoadjointe ultra-faiblement fermée de A est une algèbre de von Neumann; une telle sous-algèbre (ne contenant pas nécessairement l'élément unité de A) sera appelée *sous-algèbre de von Neumann* de A; la sous-algèbre de von Neumann engendrée par une partie M de A est donc l'adhérence ultra-faible de la sous-algèbre autoadjointe engendrée par M. Tout idéal bilatère ultra-faiblement fermé I de A est autoadjoint et peut s'écrire $I = Ap$, où p est un projecteur (i.e. un élément idempotent hermitien) du centre de A ([2], p. 45); I admet un idéal bilatère ultra-faiblement fermé supplémentaire, à savoir $A(1-p)$; l'algèbre normée A/I est une algèbre de von Neumann isomorphe à $A(1-p)$; la topologie ultra-faible sur A/I n'est autre que la topologie quotient de la topologie ultra-faible sur A.

Soient A et B deux algèbres de von Neumann; un morphisme (sous-entendu : d'algèbres involutives) $u : A \rightarrow B$ est dit *normal* si pour toute famille filtrante majorée (x_i) d'éléments de A^+ on a $u(\sup x_i) = \sup(u(x_i))$; il revient au même de dire que u est ultra-faiblement continu ([2], p. 56); son image, que nous noterons $\operatorname{Im} u$, est une sous-algèbre de von Neumann de B [pour le voir posons $q = u(1)$, projecteur de B; qBq est une sous-algèbre de von Neumann de B, ensemble des $b \in B$ vérifiant $bq = qb = b$; on a $\operatorname{Im} u \subset qBq$ et u, considéré comme morphisme de A dans qBq, est normal et transforme unité en unité; alors $\operatorname{Im} u$ est une sous-algèbre de von Neumann de qBq d'après [2], p. 57, cor. 2, donc aussi une sous-algèbre de von Neumann de B]; elle est canoniquement isomorphe à $A/\operatorname{Ker} u$. On appelle *facteurs* les algèbres de von Neumann dont le centre est réduit aux scalaires; tout morphisme normal non nul d'un facteur A dans une algèbre de von Neumann est donc un isomorphisme de A sur son image.

On rappelle que tout morphisme (d'algèbres involutives) d'une algèbre de Banach dans une C^*-algèbre diminue les normes; ceci est donc vrai en particulier pour les morphismes normaux d'algèbres de von Neumann.

§ 2. Catégorie $\mathcal{W}^*$: généralités.

On notera $\mathcal{W}^*$ la catégorie dont les objets sont les algèbres de von Neumann et les morphismes — les morphismes normaux, ne transformant pas nécessairement unité en unité; l'algèbre réduite à 0 sera considérée comme un objet de $\mathcal{W}^*$: c'est un objet nul au sens de [9], p. 31; $\mathcal{W}^*$ est une catégorie avec flèches nulles ([9], p. 105); pour toute algèbre de von Neumann A on notera 1_A le morphisme identique de A et e_A l'élément unité de A; on dira *morphisme* pour morphisme normal sauf mention expresse du contraire.

Tout couple (u, v) de flèches $A \rightrightarrows B$ admet un noyau ([9], p. 72), à savoir l'injection canonique dans A de la sous-algèbre de von Neumann de A formée des a vérifiant $u(a) = v(a)$; en particulier le noyau d'une flèche u, ou noyau du couple $(u, 0)$, peut être (et sera souvent) identifié au noyau au sens habituel, noté $\operatorname{Ker} u$; il est clair que tout idéal bilatère ultra-faiblement fermé est un noyau de couple (ou, comme on dit parfois, un « sous-objet » de A), mais on ignore s'il en est de même de toute sous-algèbre de von Neumann.

Tout couple (u, v) de flèches $A \rightrightarrows B$ admet un conoyau ([9], p. 72), à savoir la surjection canonique de B sur le quotient de B par l'idéal bilatère ultra-faiblement fermé engendré par les éléments $u(a) - v(a)$ $(a \in A)$; en particulier le conoyau $\operatorname{Coker} u$ d'une flèche u, ou conoyau du couple $(u, 0)$, est la surjection canonique $B \rightarrow B/J$ où J est l'idéal bilatère ultra-faiblement fermé engendré par $\operatorname{Im} u$; il est facile de voir que, B étant fixée, les conoyaux de couples $A \rightrightarrows B$ (parfois appelés «objets quotients» de B) sont exactement les quotients de B au sens ordinaire.

La coimage ([9], p. 110) d'une flèche $u : A \to B$ est la surjection canonique $A \to A/\mathrm{Ker}\, u$; l'image au sens des catégories est l'injection canonique dans B de l'idéal bilatère ultra-faiblement fermé engendré par l'image au sens habituel, que nous continuerons à noter $\mathrm{Im}\, u$.

Il est facile de voir que les monomorphisme ([9], p. 2) sont exactement les morphismes injectifs; par contre les épimorphismes semblent plus difficiles à caractériser; on peut seulement dire *a priori* que

$$u \text{ surjectif} \Rightarrow u \text{ épimorphisme} \Rightarrow \mathrm{Coker}\, u = 0.$$

§ 3. Produits.

Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'algèbres de von Neumann et $A = \prod_{i \in I} A_i$ le sous-ensemble de l'ensemble produit formé des familles (a_i) telles que

$$\sup \| a_i \| < +\infty;$$

A est une algèbre de von Neumann qu'on peut réaliser dans un espace hilbertien de la façon suivante ([2], p. 21) : on réalise A_i dans un espace hilbertien H_i, on pose $H = \bigoplus H_i$ (somme hilbertienne) et l'on associe à chaque $a = (a_i) \in A$ l'opérateur dans H transformant chaque vecteur $x = (x_i) \in H$ en le vecteur $(a_i(x_i))$; les applications canoniques $p_i : A \to A_i$ et $s_i : A_i \to A$ sont des morphismes normaux; tout élément (a_i) de A est somme de la famille ultra-faiblement sommable $\sum s_i(a_i)$

Soient maintenant B une algèbre de von Neumann et, pour tout i, u_i un morphisme $B \to A_i$; l'application $b \mapsto u(b) = (u_i(b))$ de B dans A est un morphisme vérifiant $p_i \circ u = u_i$ pour tout i, et c'est évidemment le seul; donc

PROPOSITION 3.1. — $\prod_{i \in I} A_i$ est le produit de la famille (A_i) dans la catégorie $\mathcal{W}^*$.

On obtient ainsi un foncteur Π de la catégorie $\mathcal{W}^*(I)$ des familles $(A_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{W}^*$ (*cf.* [9], p. 67); c'est un foncteur limite gauche, adjoint à droite du foncteur associant à toute algèbre de von Neumann B la famille constante (B), ce qui signifie entre autres qu'il existe une correspondance bijective entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}^*}(B, \Pi A_i)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}^*(I)}((B), (A_i))$; Π est donc fort à gauche ([9], p. 71); il est d'ailleurs facile de voir directement que si on a des morphismes injectifs $u_i : A_i \to B_i$, le morphisme produit est injectif; résultat analogue pour les morphismes surjectif; plus généralement :

Remarque 3.1. — Π permute aux conoyaux de couples. En effet considérons deux morphismes (u_i) et (v_i) de (A_i) dans (B_i); on vérifie facilement que leur conoyau est $(w_i) : (B_i) \to (C_i)$, où $w_i : B_i \to C_i$ est le conoyau du couple (u_i, v_i); soient

$$A \rightrightarrows B \to C$$

les morphismes correspondants; on doit montrer

(i) que $\operatorname{Ker} w$ est l'idéal bilatère ultra-faiblement fermé M engendré par les $u(a) - v(a)$; or on sait que $\operatorname{Ker} w$ contient M; pour montrer que $\operatorname{Ker} w \subset M$ prenons $b = (b_i) \in \operatorname{Ker} w$; soit s_i (resp. t_i) le morphisme canonique de A_i dans A (resp. de B_i dans B); $M \cap t_i(B_i)$ est un idéal bilatère ultra-faiblement fermé de $t_i(B_i)$ contenant tous les éléments

$$u(s_i(a_i)) - v(s_i(a_i)) = t_i(u_i(a_i) - v_i(a_i)) \qquad (a_i \in A_i),$$

donc contenant $t_i(\operatorname{Ker} w_i)$; comme $b_i \in \operatorname{Ker} w_i$, on a

$$t_i(b_i) \in M \cap t_i(B_i),$$

d'où $t_i(b_i) \in M$ et, par passage à la limite ultra-faible, $b \in M$;

(ii) que w est surjectif; soit donc $c = (c_i) \in C$; comme w_i est surjectif, il existe $b_i \in B_i$ tel que $w_i(b_i) = c_i$, et comme la norme sur C_i est la norme quotient de celle de B_i, on peut choisir b_i de façon que

$$\| b_i \| \leq \| c_i \| + 1 ;$$

alors $b = (b_i) \in B$ et $w(b) = c$.

Remarque 3.2. — ΠA_i est aussi solution d'un problème universel du type « final », ou mieux représentant d'un certain foncteur covariant : étant donnée une famille de morphismes $u_i : A_i \to B$ vérifiant

(1) $\quad u_i(x_i).u_j(x_j) = 0$, quels que soient $i \neq j$, $x_i \in A_i$, $x_j \in A_j$,

il existe un morphisme unique $u : \Pi A_i \to B$ tel que $u \circ s_i = u_i$. [Des morphismes u_i vérifiant (1) seront dits *deux à deux orthogonaux.*]

L'unicité de u est évidente, les $s_i(A_i)$ engendrant ΠA_i; pour établir l'existence, réalisons B dans un espace hilbertien H; soit H_i le sous-espace essentiel de $u_i(A_i)$ [ou supplémentaire orthogonal de l'intersection des noyaux des éléments de $u_i(A_i)$]; les H_i sont deux à deux orthogonaux; comme B contient tout opérateur de la forme

$$Th = \begin{cases} u_i(a_i).h & \text{pour} \quad h \in H_i, \\ 0 & \text{pour} \quad h \in H \ominus H_i, \end{cases}$$

B contient l'algèbre d'opérateurs $\Pi u_i(A_i)$; et le morphisme cherché s'obtient en composant Πu_i avec l'injection canonique de $\Pi u_i(A_i)$ dans B.

§ 4. Retour sur les représentations des algèbres involutives.

LEMME 4.1. — Pour toute algèbre involutive A les classes de quasi-équivalence de représentations de A (dans des espaces hilbertiens) forment un ensemble.

Démonstration. — A tout couple (π, x) formé d'une représentation π de A et d'un vecteur x totalisateur pour π (s'il en existe), on associe classiquement la forme linéaire positive sur $A : a \mapsto (\pi(a).x \mid x)$, et l'on sait que si deux couples (π, x) et (π', x') donnent la même forme linéaire positive, π et π' sont équivalentes (*cf.* [3], 2.4.1); il en résulte que les classes d'équivalence de représentations admettant des vecteurs totalisateurs forment un ensemble; il en est de même des sommes de telles classes d'équivalence deux à deux distinctes; enfin toute représentation est quasi équivalente à une telle somme ([3], 2.2.7).

C.Q.F.D.

Soit encore A une algèbre involutive; soit $\mathcal{C}_A$ la catégorie ainsi définie : ses objets sont les morphismes d'algèbres involutives $u : A \to \mathcal{A}$, où $\mathcal{A}$ est une algèbre de von Neumann et où $\operatorname{Im} u$ est ultra-faiblement dense dans $\mathcal{A}$; si $u : A \to \mathcal{A}$ et $v : A \to \mathcal{B}$ sont deux tels morphismes, un morphisme $u \to v$ est un morphisme (normal) $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tel que $f \circ u = v$. En particulier les objets u et v sont isomorphes si et seulement s'il existe un isomorphisme f de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$ tel que $f \circ u = v$. Si maintenant on associe à toute représentation π de A dans un espace hilbertien le morphisme (d'algèbres involutives) u correspondant de A dans l'adhérence ultra-faible de $\pi(A)$, il est facile de voir que deux représentations π et π' quasi équivalentes donnent deux objets u et u' isomorphes au sens précédent (la réciproque n'est pas tout à fait exacte, parce que dans la définition de la quasi-équivalence (*cf.* [3], 5.3.1) il est question de l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(A)$, laquelle peut différer de l'adhérence ultra-faible de $\pi(A)$ par l'adjonction d'une unité; cette réciproque est exacte si l'on suppose π et π' non dégénérées); comme d'autre part tout objet de $\mathcal{C}_A$ peut évidemment être obtenu de cette façon, on voit que

LEMME 4.2. — Les classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal{C}_A$ forment un ensemble.

Supposons maintenant que pour tout $a \in A$ il existe $k_a \geq 0$ tel que $\| u(a) \| \leq k_a$ quel que soit $u \in \mathcal{C}_A$ (c'est le cas si A est une algèbre de Banach involutive, avec $k_a = \| a \|$); choisissons une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'objets de $\mathcal{C}_A$ contenant un objet et un seul de chaque classe d'isomorphie, soit $u_i : A \to \mathcal{A}_i$; formons le morphisme (d'algèbres involutives) $u : A \to \prod \mathcal{A}_i$ défini par $u(a) = (u_i(a))$ $(a \in A)$, ce qui a un sens puisque $\| u_i(a) \| \leq k_a$; enfin notons $\mathcal{A}$ l'adhérence ultra-faible de $\operatorname{Im} u$ dans $\prod \mathcal{A}_i$; alors le couple $(u, \mathcal{A})$ est solution du problème universel suivant : trouver une algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$ et un morphisme (d'algèbres involutives) $u : A \to \mathcal{A}$ tels que pour toute algèbre de von Neumann $\mathcal{B}$ et tout morphisme (d'algèbres involutives) $v : A \to \mathcal{B}$, il existe un morphisme (normal) unique $w : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tel que $w \circ u = v$.

Si A est une C^*-algèbre, $\mathcal{A}$ sera dite *algèbre de von Neumann enveloppante* de A ; on notera que ce qu'on appelle ainsi dans [3] est une réalisation de $\mathcal{A}$; nous utiliserons ici, à plusieurs reprises, des constructions analogues à celle-ci.

Notation. — Dans la suite on désignera par $\mathcal{C}^*$ la catégorie des C^*-algèbres avec, comme morphismes, tous les morphismes d'algèbres involutives; on rappelle qu'un tel morphisme diminue automatiquement les normes.

§ 5. Sommes.

Soient A_1 et A_2 deux algèbres de von Neumann; d'après [10], elles admettent une somme dans la catégorie $\mathcal{C}^*$, c'est-à-dire qu'il existe une C^*-algèbre A^0 et des morphismes (dans $\mathcal{C}^*$) $r_i : A_i \to A^0$ $(i = 1, 2)$ possédant la propriété suivante : pour toute C^*-algèbre B et tout couple de morphismes (dans $\mathcal{C}^*$) $v_i : A_i \to B$, il existe un morphisme (dans $\mathcal{C}^*$) unique $v : \mathrm{A}^0 \to B$ tel que $v \circ r_i = v_i$. Considérons, parmi les objets $u : A^0 \to X$ de la catégorie $\mathcal{C}_{A^0}$, définie au paragraphe 4, ceux pour lesquels les morphismes composés $u \circ r_1$ et $u \circ r_2$ sont normaux; choisissons une famille $(u_j)_{j \in J}$ de tels objets contenant un objet et un seul de chaque classe d'isomorphie, soit $u_j : A^0 \to \mathcal{A}_j$; formons le morphisme (dans $\mathcal{C}^*$) $g : A^0 \to \Pi \mathcal{A}_j$, ce qui a un sens puisque $\| u_j(a) \| \leq \| a \|$; soient A la sous-algèbre de von Neumann de $\Pi \mathcal{A}_j$ engendrée par $\mathrm{Im}\, g$ et w_i le morphisme (normal) de A_i dans A composé de r_i et g; il est alors immédiat que pour toute algèbre de von Neumann B et tout couple de morphismes (normaux) $t_i : A_i \to B$, il existe un morphisme (normal) unique $t : A \to B$ tel que $t \circ w_i = t_i$; en d'autres termes A est la somme de A_1 et A_2 dans $\mathfrak{W}^*$ et l'on peut énoncer :

PROPOSITION 4.1. — Dans la catégorie $\mathfrak{W}^*$ la somme de deux objets existe toujours et se construit de la façon indiquée ci-dessus.

Si l'on note $A_1 \amalg A_2$ la somme de A_1 et A_2, on obtient un foncteur $\amalg$ de la catégorie $\mathcal{D}$ formée des couples d'algèbres de von Neumann dans $\mathfrak{W}^*$; c'est un foncteur limite droite, adjoint à gauche du foncteur qui associe à toute algèbre de von Neumann B le couple (B, B), ce qui signifie entre autres qu'il existe une correspondance bijective entre $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{W}^*}(A_1 \amalg A_2, B)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}((A_1, A_2), (B, B))$ (*cf.* [9], p. 71); $\amalg$ est fort à droite, c'est-à-dire permute aux limites droites (si toutefois elles existent) (1), et en particulier aux conoyaux de couples.

(1) Elles existent effectivement d'après des résultats inédits de C. Chevalley.

§ 6. Limites projectives.

Puisque la catégorie $\mathfrak{W}^*$ admet noyaux de couples et produits, elle admet aussi les limites gauches pour tout foncteur d'une catégorie quelconque dans $\mathfrak{W}^*$ ([9], p. 75), et en particulier les limites projectives de systèmes projectifs : soient I un ensemble préordonné, $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'algèbres de von Neumann avec, pour tout couple $i \leq j$, un morphisme $u_{i,j} : A_j \to A_i$ de façon que $u_{i,i} = 1_{A_i}$ et, si $i \leq j \leq k$, $u_{i,j} \circ u_{j,k} = u_{i,k}$; $\varprojlim A_i$ est la sous-algèbre de von Neumann de ΠA_i formée des familles (a_i) vérifiant $a_i = u_{i,j}(a_j)$ pour tout couple $i \leq j$. Comme tout foncteur limite gauche, le foncteur $\varprojlim$ (de la catégorie des systèmes projectifs d'algèbres de von Neumann dans $\mathfrak{W}^*$) est adjoint à droite, donc permute aux limites gauches et en particulier aux noyaux de couples. On peut montrer qu'il transforme les morphismes surjectifs en morphismes surjectifs, en utilisant le fait que la boule unité d'une algèbre de von Neumann est ultra-faiblement compacte (tout au moins si I est ordonné filtrant).

§ 7. Limites inductives.

Soient I un ensemble ordonné filtrant, $(A_i)_{i \in I}$ un système inductif d'algèbres de von Neumann avec des morphismes $w_{i,j} : A_i \to A_j$ pour $i \leq j$; soient A^0 la limite inductive de ce système dans la catégorie $\mathcal{C}^*$ (*cf.* [10]) et $r_i : A_i \to A^0$ les morphismes (dans $\mathcal{C}^*$) canoniques; parmi les objets $u : A^0 \to \mathfrak{A}$ de la catégorie $\mathcal{C}_{A^0}$ définie au paragraphe 4, appelons *normaux* ceux pour lesquels tous les composés $u \circ r_i$ sont des morphismes normaux; choisissons une famille $(u_j)_{j \in J}$ contenant un objet et un seul de chaque classe d'isomorphie d'objets normaux, soit $u_j : A^0 \to \mathfrak{A}_j$; formons le morphisme (dans $\mathcal{C}^*$) $g : A^0 \to \Pi \mathfrak{A}_j$; soient A la sous-algèbre de von Neumann de $\Pi \mathfrak{A}_j$ engendrée par $\operatorname{Im} g$ et, pour tout i, w_i le morphisme (normal) de A_i dans A composé de r_i et de g; il est immédiat que

(i) $w_j \circ w_{i,j} = w_i$ pour tout couple $i \leq j$;

(ii) pour toute algèbre de von Neumann B et toute famille de morphismes $v_i : A_i \to B$ vérifiant $v_j \circ w_{i,j} = v_i$ pour tout couple $i \leq j$, il existe un morphisme unique $v : A \to B$ tel que $v \circ w_i = v_i$ pour tout i;

autrement dit, A est la limite inductive du système inductif donné dans la catégorie $\mathfrak{W}^*$, et l'on peut énoncer :

PROPOSITION 7.1. — Dans la catégorie $\mathcal{W}^*$ la limite inductive d'un système inductif indexé par un ensemble ordonné filtrant existe toujours et se construit comme indiqué ci-dessus.

Elle sera notée $\varinjlim A_i$ (²).

Remarque 7.1. — Il existe une correspondance bijective entre les projecteurs du centre de $\varinjlim A_i$ et les classes d'isomorphie d'objets normaux de $\mathcal{C}_{A^0}$. Soit en effet p un tel projecteur; en composant g avec le morphisme canonique $A \to Ap$, on obtient un objet normal de $\mathcal{C}_{A^0} : t_p : A^0 \to Ap$; l'application qui fait correspondre à p la classe d'isomorphie de cet objet normal est

(i) injective, car si t_p et t_q sont isomorphes, il existe un isomorphisme de Ap sur Aq tel que $f(p.g(a)) = q.g(a)$ pour tout $a \in A^0$ et, par continuité ultra-faible, $f(px) = qx$ pour tout $x \in \mathrm{A}$, ce qui entraîne $p = q$;

(ii) surjective, car tout objet normal de $\mathcal{C}_{A^0}$ est isomorphe, par définition, à l'un des u_j considérés ci-dessus; le morphisme canonique $h_j : A \to \mathfrak{A}_j$ est surjectif puisque son image contient celle de u_j; $\mathrm{Ker}\, h_j$ est de la forme Ap, p projecteur de A, et u_j est isomorphe à $t_{e_A - p}$.

C.Q.F.D.

On obtient ainsi un foncteur $\varinjlim$ de la catégorie des systèmes inductifs d'algèbres de von Neumann indexés par I (I ensemble ordonné filtrant donné) dans $\mathcal{W}^*$; il est adjoint à gauche du foncteur qui associe à toute algèbre de von Neumann B le système constant (B); il est fort à droite ([9], p. 71) et en particulier permute aux conoyaux de couples; d'autre part on vérifie immédiatement qu'il transforme les morphismes surjectifs en morphismes surjectifs.

Remarque 7.2. — Le foncteur $\varinjlim$ *n'est pas exact à gauche*; plus précisément on peut avoir un système inductif (A_i) avec des morphismes $w_{i,j}$ et un système inductif de morphismes injectifs $t_i : A_i \to A$ sans que le morphisme correspondant $t : \varinjlim A_i \to A$ soit injectif.

Premier exemple. — Soit A un facteur hyperfini continu engendré par une suite croissante de facteurs A_i de type I_{2^i}; prenons pour $w_{i,j}$ l'injection canonique de A_i dans A_j et pour t_i l'injection canonique de A_i dans A; comme chaque A_i est identique à son algèbre de von Neumann enveloppante, $\varinjlim A_i$ est isomorphe à l'algèbre de von Neumann enve-

(²) Remarquons que $\varinjlim A_i$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\mathrm{Im}\, w_i$. La notion de limite inductive a été introduite, dans un cas particulier, dans [15].

loppante de la C*-algèbre A^0 limite inductive des A_i (*cf.* § 9), laquelle s'identifie naturellement à la sous-C^*-algèbre de A engendrée par les A_i (*cf.* [10]). Si t était injectif, comme il est surjectif, ce serait un isomorphisme et $\varinjlim A_i$ serait un facteur; A^0 n'aurait qu'une classe de quasi-équivalence de représentations non dégénérées, donc qu'une classe d'équivalence de représentations irréductibles, et par suite (*cf.* [11]) serait isomorphe à l'algèbre des opérateurs compacts dans un espace hilbertien — ce qui n'est évidemment pas le cas.

On peut d'ailleurs construire explicitement une représentation non factorielle de A^0 (i.e. un objet normal $A^0 \to \mathcal{A}$ de $\mathcal{C}_{A^0}$ où $\mathcal{A}$ n'est pas un facteur) de la façon suivante : d'après [2], p. 305, ex. 1, il existe une algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$, qui n'est pas un facteur, engendrée par une suite croissante de facteurs B_i de type I_{2^i}; on peut alors construire de proche en proche, comme indiqué dans la démonstration de [2], p. 291, th. 2, des isomorphismes $s_i : A_i \to B_i$ qui se prolongent les uns les autres; en composant chaque s_i avec le morphisme canonique $B_i \to \mathcal{A}$, on obtient un système inductif de morphismes (dans $\mathcal{C}^*$) $A_i \to \mathcal{A}$, d'où un morphisme (dans $\mathcal{C}^*$) $A^0 \to \mathcal{A}$ dont l'image engendre évidemment l'algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$.

Ajoutons que les C^*-algèbres du type de A^0 ont été étudiées dans [6].

Deuxième exemple. — Prenons $A_i = \mathbf{C}^{2^i}$ et $w_{i,i+1} : A_i \to A_{i+1}$ transformant tout élément $(c_1, c_2, \ldots, c_{2^i})$ en l'élément $(c_1, c_1, c_2, c_2, \ldots, c_{2^i}, c_{2^i})$; la C^*-algèbre commutative A^0, limite inductive des A_i, a un spectre non dénombrable; l'algèbre de von Neumann $\varinjlim A_i$ est, comme dans l'exemple précédent, l'algèbre de von Neumann enveloppante de A^0; elle admet donc une infinité non dénombrable de caractères normaux. Soit d'autre part B l'algèbre L^∞ construite sur $[0, 1]$ avec la mesure de Lebesgue; on définit des morphismes injectifs $t_i : A_i \to B$ en associant à tout élément $(c_1, c_2, \ldots, c_{2^i})$ la fonction égale à c_j sur $](j-1)/2^i, j/2^i[$ pour tout $j = 1, 2, \ldots, 2^i$ et il est clair que les t_i forment un système inductif; le morphisme correspondant $t : \varinjlim A_i \to B$ est trivialement surjectif; s'il était injectif, B serait isomorphe à $\varinjlim A_i$, donc admettrait des caractères normaux; mais si x est un caractère normal et p le projecteur défini par $\mathrm{Ker}\, x = Bp$, $e_B - p$ est un projecteur minimal de B; or B n'admet visiblement pas de projecteurs minimaux.

Remarque 7.3. — Il est clair que si I est dénombrable et si chaque A_i est ultra-faiblement séparable [3], $\varinjlim A_i$ l'est aussi; par contre les A_i peuvent être de genre dénombrable sans que $\varinjlim A_i$ le soit, comme le montre l'exemple 2 ci-dessus : $\varinjlim A_i$ (commutative) admet une infinité

[3] i. e. contient une suite ultra-faiblement dense.

non dénombrable de caractères normaux, et il leur correspond une infinité non dénombrable de projecteurs minimaux de $\underrightarrow{\lim} A_i$, deux à deux distincts, donc deux à deux orthogonaux.

§ 8. Produits tensoriels.

1. Première notion de produit tensoriel.

Soient A_1 et A_2 deux algèbres de von Neumann; on notera $A_1 \otimes A_2$ leur produit tensoriel algébrique. Rappelons qu'on définit classiquement une première notion de produit tensoriel-algèbre de von Neumann de la façon suivante ([2], p. 26) : on réalise A_i dans un espace hilbertien H_i et l'on prend, dans l'espace hilbertien $H_1 \otimes H_2$, l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $a_1 \otimes a_2$ $(a_i \in A_i)$; enfin on montre que le résultat obtenu ne dépend pas du choix des réalisations de A_1 et A_2 ([2], p. 60); le produit tensoriel ainsi obtenu sera noté $A_1 \overset{c}{\otimes} A_2$ et $A_1 \otimes A_2$ sera souvent considérée comme une sous-algèbre de $A_1 \overset{c}{\otimes} A_2$.

Lemme 8.1. — Soient A_1 une algèbre de von Neumann et $u : A \to B$ un morphisme; il existe un morphisme unique $v : A_1 \overset{c}{\otimes} A \to A_1 \overset{c}{\otimes} B$ tel que

$$v(a_1 \otimes a) = a_1 \otimes u(a), \qquad \text{quels que soient } a_1 \in A_1 \text{ et } a \in A;$$

si u est injectif, il en est de même de v.

L'unicité est triviale. Pour établir l'existence décomposons u en trois morphismes

$$A \overset{u'}{\to} C \overset{u''}{\to} D \overset{u'''}{\to} B,$$

où $C = \operatorname{Im} u$, $D = qBq$, $q = u(e_A)$ (on rappelle que C et D sont des sous-algèbres de von Neumann de B vérifiant $C \subset D$; *voir* § 1); il suffit de construire :

(i) un morphisme $v' : A_1 \overset{c}{\otimes} A \to A_1 \overset{c}{\otimes} C$ tel que $v'(a_1 \otimes a) = a_1 \otimes u'(a)$ pour $a_1 \in A_1$ et $a \in A$; ceci est fait dans [2], p. 60;

(ii) un morphisme v''; $A_1 \overset{c}{\otimes} C \to A_1 \overset{c}{\otimes} D$ tel que $v''(a_1 \otimes c) = a_1 \otimes u''(c)$ pour $a_1 \in A_1$ et $c \in C$; réalisons A_1 et D dans des espaces hilbertiens H_1 et K; C se trouve réalisée dans K puisqu'elle contient e_D; $A_1 \overset{c}{\otimes} D$ étant réalisée dans $H_1 \otimes K$, la sous-algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $a_1 \otimes c$ est une réalisation de $A_1 \overset{c}{\otimes} C$. Noter que v'' est injectif;

(iii) un morphisme $v''' : A_1 \overset{c}{\otimes} D \to A_1 \overset{c}{\otimes} B$ tel que $v'''(a_1 \otimes d) = a_1 \otimes u'''(d)$ pour $a_1 \in A_1$ et $d \in D$; réalisons A_1 et B dans des espaces hilbertiens H_1 et L, D dans $K = q(L)$; considérons $H_1 \otimes K$ comme un sous-espace hilbertien de $H_1 \otimes L$; l'application

$$w = 1_{A_1} \otimes u''' : \quad A_1 \otimes D \to A_1 \otimes B$$

est injective; pour $d \in D$, $u'''(d)$ est l'opérateur dans L égal à d dans K et à o dans $L \ominus K$; donc pour $x \in A_1 \otimes D$, $w(x)$ est l'opérateur dans $H_1 \otimes L$ égal à x dans $H_1 \otimes K$ et à o dans son supplémentaire orthogonal; d'où il résulte que w est bicontinu pour les topologies ultra-faibles; le morphisme v''' cherché s'obtient en prolongeant w par continuité à $A_1 \overset{c}{\otimes} D$. Noter qu'il est injectif.

Enfin si u est injectif, u' est un isomorphisme, v' en est un autre, et $v = v''' \circ v'' \circ v'$ est injectif.

C.Q.F.D.

On peut donc énoncer :

Proposition 8.1. — Pour toute algèbre de von Neumann A_1, $A \overset{c}{\otimes} \cdot$ est un foncteur de la catégorie $\mathfrak{V}^*$ dans elle-même; ce foncteur transforme les morphismes injectifs en morphismes injectifs.

2. Deuxième notion de produit tensoriel. Définition.

Soient A_1 et A_2 deux algèbres de von Neumann; posons $A^0 = A_1 \otimes A_2$ et notons r_i les morphismes (d'algèbres involutives) $A_i \to A^0$ définis par

$$r_1(a_1) = a_1 \otimes e_{A_2},$$
$$r_2(a_2) = e_{A_1} \otimes a_2;$$

considérons, parmi les objets $u : A^0 \to \mathfrak{A}$ de la catégorie $\mathcal{C}_{A^0}$ définie au paragraphe 4, ceux pour lesquels les composés $u \circ r_1$ et $u \circ r_2$ sont des morphismes normaux (de tels objets seront dits *normaux*); choisissons une famille $(u_j)_{j \in J}$ contenant un objet et un seul de chaque classe d'isomorphie d'objets normaux, soit $u_j : A^0 \to \mathfrak{A}_j$; formons le morphisme (d'algèbres involutives) $g : A^0 \to \Pi \mathfrak{A}_j$ [ceci a un sens car pour tout $a = \Sigma a_{1,i} \otimes a_{2,i} \in A^0$, on a

$$\| u_j(a) \| = \left\| \sum_i u_j(r_1(a_{1,i})) \cdot u_j(r_2(a_{2,i})) \right\|$$
$$\leq \sum_i \| u_j(r_1(a_{1,i})) \| \cdot \| u_j(r_2(a_{2,i})) \| \leq \sum_i \| a_{1,i} \| \cdot \| a_{2,i} \| \Bigg];$$

soient A la sous-algèbre de von Neumann de $\Pi\mathfrak{A}_j$ engendrée par $\operatorname{Im} g$ et, pour $i = 1, 2$, soit w_i le morphisme (normal) de A_i dans A composé de r_i et de g; on a alors immédiatement le résultat suivant :

PROPOSITION 8.2. — L'algèbre de von Neumann A et le couple de morphismes (w_1, w_2) sont solution du problème universel suivant : trouver une algèbre de von Neumann A et un couple de morphismes $w_i = A_i \rightarrow A$ tels que :

(i) $w_1(a_1).w_2(a_2) = w_2(a_2).w_1(a_1)$, quels que soient $a_i \in A_i$;

(ii) pour toute algèbre de von Neumann B et tout couple de morphismes $t_i : A_i \rightarrow B$ vérifiant

(1) $$t_i(a_1).t_2(a_1) = t_2(a_2).t_1(a_1), \qquad \text{quels que soient } a_i \in A_i,$$

il existe un morphisme unique $t : A \rightarrow B$ tel que $t \circ w_i = t_i$.

Cette algèbre de von Neumann A sera notée $A_1 \overset{\mu}{\otimes} A_2$. Si l'on se plaçait dans la catégorie des algèbres de von Neumann commutatives, $A_1 \overset{\mu}{\otimes} A_2$ ne serait autre que la somme de A_1 et A_2 au sens des catégories; dans la catégorie $\mathfrak{W}^*$ on peut seulement dire que $A_1 \overset{\mu}{\otimes} A_2$ est un représentant du foncteur de $\mathfrak{W}^*$ dans la catégorie des ensembles, qui associe à toute algèbre de von Neumann B l'ensemble des couples de morphismes vérifiant (1) (sur ce point, *voir* [9], p. 38).

Remarque 8.1. — On démontrerait comme à la remarque 7.1 qu'il y a correspondance bijective entre les projecteurs du centre de $A_1 \overset{\mu}{\otimes} A_2$ et les classes d'isomorphie d'objets normaux de $\mathcal{C}_{A^0}$.

Parmi les objets normaux de $\mathcal{C}_{A^0}$ il y a évidemment l'application canonique $h : A_1 \otimes A_2 \rightarrow A_1 \overset{c}{\otimes} A_2$; il existe donc un morphisme unique de $A_1 \overset{\mu}{\otimes} A_2$ sur $A_1 \overset{c}{\otimes} A_2$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \overset{\mu}{\otimes} A_2 \arrow[dd] \\
A_1 \otimes A_2 \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "h"'] & \\
 & A_1 \overset{c}{\otimes} A_2
\end{tikzcd}$$

il est *surjectif* et sera dit *canonique*. Comme h est injectif, il en est de même de g, ce qui permet d'identifier $A_1 \otimes A_2$ à une sous-algèbre de $A_1 \overset{\mu}{\otimes} A_2$

On notera que $A_1 \overset{\mu}{\otimes} A_2$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $A_1 \otimes A_2$.

LEMME 8.2. — Si A_1 (ou A_2) est un facteur discret, le morphisme canonique défini ci-dessus est un isomorphisme.

Il suffit pour le voir de construire un morphisme $l : A_1 \overset{c}{\otimes} A_2 \to A_1 \overset{\mu}{\otimes} A_2$ tel que $l \circ h = g$; pour cela réalisons $A_1 \overset{\mu}{\otimes} A_2$ dans un espace hilbertien H; comme $w_1(A_1)$ est un facteur discret, et comme $w_2(A_2)$ est contenu dans son commutant, on peut écrire.

$$H = H_1 \otimes H_2,$$
$$w_1(a_1) = v_1(a_1) \otimes 1_{H_2} \quad \text{pour tout} \quad a_1 \in A_1,$$
$$w_2(a_2) = 1_{H_1} \otimes v_2(a_2) \quad \text{pour tout} \quad a_2 \in A_2,$$

où v_i est un morphisme de A_i dans $\mathcal{L}(H_i)$; d'après la proposition 8.1 il existe un morphisme l de $A_1 \overset{c}{\otimes} A_2$ dans $\mathcal{L}(H_1) \overset{c}{\otimes} \mathcal{L}(H_2) = \mathcal{L}(H_1 \otimes H_2)$ tel que

$$l(h(a_1 \otimes a_2)) = v_1(a_1) \otimes v_2(a_2) = g(a_1 \otimes a_2),$$

c'est-à-dire $l \circ h = g$.

3. Produits tensoriels de morphismes normaux.

Pour $i = 1, 2$, soient A_i et B_i des algèbres de von Neumann et u_i un morphisme $A_i \to B_i$; le couple de morphismes

$$t_1 : \quad a_1 \in A_1 \mapsto u_1(a_1) \otimes e_{B_2} \in B_1 \overset{\mu}{\otimes} B_2,$$
$$t_2 : \quad a_2 \in A_2 \mapsto e_{B_1} \otimes u_2(a_2) \in B_1 \overset{\mu}{\otimes} B_2$$

définit un morphisme noté $u_1 \overset{\mu}{\otimes} u_2$ de $A_1 \overset{\mu}{\otimes} A_2$ dans $B_1 \overset{\mu}{\otimes} B_2$, caractérisé par

$$\left(u_1 \overset{\mu}{\otimes} u_2\right)(a_1 \otimes a_2) = u_1(a_1) \otimes u_2(a_2);$$

il est clair que $\mathrm{Im}\left(u_1 \overset{\mu}{\otimes} u_2\right)$ est la sous-algèbre de von Neumann engendrée par $\mathrm{Im}\, u_1 \otimes \mathrm{Im}\, u_2$. Posons $A = A_1 \overset{\mu}{\otimes} A$ et $u = u_1 \overset{\mu}{\otimes} u_2$.

Lemme 8.3. — Si u_1 et u_2 sont surjectifs, u l'est aussi et son noyau est égal à la sous-algèbre de von Neumann I de A engendrée par $\mathrm{Ker}\, u_1 \otimes A_2$ et $A_1 \otimes \mathrm{Ker}\, u_2$.

La première assertion est triviale; ensuite il est clair que $I \subset \mathrm{Ker}\, u$ et que I est un idéal bilatère ultra-faiblement fermé; pour montrer que $I \supset \mathrm{Ker}\, u$ notons w le morphisme canonique $A \to A/I$; pour $a_i \in A_i$, $w(a_1 \otimes a_2)$ ne dépend que de $u_1(a_1)$ et $u_2(a_2)$, d'où une application bilinéaire $v : B_1 \times B_2 \to A/I$ telle que

$$v(u_1(a_1),\ u_2(a_2)) = w(a_1 \otimes a_2);$$

v définit une application linéaire $v' : B_1 \otimes B_2 \to A/I$, telle que

$$v'(u_1(a_1) \otimes u_2(a_2)) = w(a_1 \otimes a_2);$$

v' est un morphisme d'algèbres involutives (vérification immédiate) et ses restrictions à B_1 et B_2 sont normales : en effet la restriction à B_1 (par exemple) s'obtient par passage au quotient à partir du morphisme normal

$$a_1 \in A_1 \mapsto w(a_1 \otimes e_{A_2}) \in A/I;$$

donc v' se prolonge en un morphisme (encore noté v') $B_1 \overset{\mu}{\otimes} B_2 \to A/I$; les morphismes $v' \circ u$ et w sont identiques puisqu'ils prennent la même valeur pour tout élément $a_1 \otimes a_2$; donc $I = \operatorname{Ker} w \subset \operatorname{Ker} u$.

4. Étude du foncteur $A_0 \overset{\mu}{\otimes} \cdot$ (A_0 algèbre de von Neumann fixée.)

Il s'agit du foncteur associant à toute algèbre de von Neumann A l'algèbre $A_0 \overset{\mu}{\otimes} A$ et à tout morphisme $u : A \to B$ le morphisme $I_{A_0} \overset{\mu}{\otimes} u$, qui sera aussi noté u'.

PROPOSITION 8.3. — *Le foncteur $A_0 \overset{\mu}{\otimes} \cdot$ permute aux conoyaux de couples.*

Soient en effet u_1 et u_2 deux morphismes $A \to B$ et $v : B \to C$ leur conoyau; il s'agit de prouver

(i) que v' est surjectif, ce qui résulte du lemme 8.3;

(ii) que $\operatorname{Ker} v'$ est égal à l'idéal bilatère ultra-faiblement fermé I de $A_0 \otimes B$ engendré par les éléments $u'_1(x) - u'_2(x)$ $\left(x \in A_0 \overset{\mu}{\otimes} A\right)$; or $\operatorname{Ker} v$ est l'idéal bilatère faiblement fermé engendré par les éléments $u_1(a) - u_2(a)$, où $a \in A$ et (lemme 8.3) $\operatorname{Ker} v'$ est la sous-algèbre de von Neumann de $A_0 \overset{\mu}{\otimes} B$ engendrée par $A_0 \otimes \operatorname{Ker} v$; il est alors facile de voir que $I = \operatorname{Ker} v'$.

PROPOSITION 8.4. — *Le foncteur $A_0 \overset{\mu}{\otimes} \cdot$ permute aux produits; plus précisément pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'algèbres de von Neumann il existe un isomorphisme de $A_0 \overset{\mu}{\otimes} \Pi A_i$ sur $\Pi\left(A_0 \overset{\mu}{\otimes} A_i\right)$ transformant tout élément $a_0 \otimes (a_i)$ en l'élément $(a_0 \otimes a_i)$.*

Pour tout $j \in I$ le morphisme canonique $p_j : \Pi A_i \to A_j$ définit un morphisme $p'_j : A_0 \overset{\mu}{\otimes} \Pi A_i \to A_0 \overset{\mu}{\otimes} A_j$; d'où un morphisme $p' : A_0 \overset{\mu}{\otimes} A_i \to \Pi\left(A_0 \overset{\mu}{\otimes} A_i\right)$ qui transforme tout élément $a_0 \otimes (a_i)$ en l'élément $(a_0 \otimes a_i)$. D'autre part pour tout $j \in I$, le morphisme canonique $s_j : A_j \to \Pi A_i$ définit un morphisme $s'_j : A_0 \overset{\mu}{\otimes} A_j \to A_0 \overset{\mu}{\otimes} \Pi A_i$; il est facile de voir que les s'_j sont deux à deux orthogonaux (*cf.* remarque 3.3); ils définissent donc un morphisme $s' : \Pi\left(A_0 \overset{\mu}{\otimes} A_i\right) \to A_0 \overset{\mu}{\otimes} \Pi A_i$ tel que $s' \circ t_j = s'_j$ en notant t_j le morphisme canonique de $A_0 \overset{\mu}{\otimes} A_j$ dans

$\Pi\left(A_0 \overset{\mu}{\otimes} A_i\right)$. Enfin pour montrer que $p' \circ s'$ (resp. $s' \circ p'$) est l'identité, il suffit de vérifier que $p' \circ s' \circ t_j = t_j$ (resp. que $s' \circ p' \circ s'_j = s'_j$) pour tout j — ce qui est facile.

5. Platitude.

On va voir que, en général, le foncteur $A_0 \overset{\mu}{\otimes} .$ ne permute pas aux noyaux et, plus précisément, ne transforme pas les morphismes injectifs en morphismes injectifs.

Proposition 8.5. — Pour une algèbre de von Neumann A_0 les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour toute algèbre de von Neumann A le morphisme canonique $A_0 \overset{\mu}{\otimes} A \to A_0 \overset{c}{\otimes} A$ est un isomorphisme;

(ii) $A_0 \overset{\mu}{\otimes} \cdot$ transforme tout morphisme injectif en un morphisme injectif;

(iii) $A_0 \overset{\mu}{\otimes} \cdot$ transforme tout morphisme injectif de la forme $A \to B$, où B est un facteur discret, en un morphisme injectif.

Démonstration. — Notons d'abord que le morphisme canonique $A_0 \overset{\mu}{\otimes} A \to A_0 \overset{c}{\otimes} A$ définit un morphisme fonctoriel du foncteur $A_0 \overset{\mu}{\otimes} \cdot$ dans le foncteur $A_0 \overset{\mu}{\otimes} .$; (i) exprime que ce morphisme fonctoriel est un isomorphisme, et (i) $\Rightarrow$ (ii) parce que $A_0 \overset{c}{\otimes} \cdot$ transforme morphismes injectifs en morphismes injectifs (prop. 8.1). L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est évidente; démontrons enfin que (iii) $\Rightarrow$ (i) : toute algèbre de von Neumann A est une sous-algèbre de von Neumann d'un facteur discret B, d'où un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A_0 \overset{\mu}{\otimes} A & \xrightarrow{u} & A_0 \overset{\mu}{\otimes} B \\ {\scriptstyle w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ A_0 \overset{c}{\otimes} A & \to & A_0 \overset{c}{\otimes} B \end{array}$$

u étant injectif par hypothèse et v en vertu du lemme 8.2, w est injectif.

Définition. — Une algèbre de von Neumann A_0 sera dite *plate* si elle vérifie les conditions équivalentes de la proposition précédente (terminologie empruntée à [1]); le lemme 8.2 montre donc que tout facteur discret est plat.

Lemme 8.4. — Pour qu'une algèbre de von Neumann ΠA_i soit plate, il faut et il suffit que chaque A_i le soit.

Soit en effet $u : B \to C$ un morphisme injectif; on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Pi A_i \overset{\mu}{\otimes} B & \xrightarrow{1 \overset{\mu}{\otimes} u} & \Pi A_i \overset{\mu}{\otimes} C \\ \downarrow{\scriptstyle v_1} & & \downarrow{\scriptstyle v_2} \\ \Pi\left(A_i \overset{\mu}{\otimes} B\right) & \xrightarrow[w]{} & \Pi\left(A_i \overset{\mu}{\otimes} C\right) \end{array}$$

où v_1 et v_2 sont les isomorphismes de la proposition 8.3 et w le morphisme produit des morphismes $w_i : A_i \overset{\mu}{\otimes} B \to A_i \overset{\mu}{\otimes} C$. Si les A_i sont plates, les w_i sont injectifs; il en est de même de w (*cf.* § 3), et par suite de $1 \overset{\mu}{\otimes} u$; réciproquement si ΠA_i est plate, $1 \overset{\mu}{\otimes} u$ est injectif, donc aussi w, et par suite chaque w_i.

Proposition 8.6. — Les algèbres de von Neumann plates sont exactement les produits de facteurs discrets.

Tout d'abord une telle algèbre est plate d'après le lemme 8.4. Inversement soit A une algèbre de von Neumann plate et soit C son centre; on peut décomposer C en un produit $C_1 \times C_2$, C_1 étant atomique et C_2 sans atomes; A est alors décomposée en un produit $A_1 \times A_2$, où A_1 est un produit de facteurs B_i et où A_2 a un centre sans atomes; on va démontrer la proposition en prouvant successivement

(i) que chaque B_i est discret ou, ce qui revient au même, qu'un facteur continu B n'est pas plat; pour cela réalisons B dans un espace hilbertien H et notons B' son commutant; $B \overset{c}{\otimes} B'$ est un facteur ([2], p. 103) continu ([12], cor. de la prop. 3); d'autre part on a un objet normal de la catégorie $\mathcal{C}_{B \otimes B'}$: $u : B \otimes B' \to \mathcal{L}(H)$ défini par

$$u\left(\sum_i b_i \otimes b'_i\right) = \sum_i b_i b'_i;$$

si B était plat, $B \overset{\mu}{\otimes} B'$ serait isomorphe à $B \overset{c}{\otimes} B'$ et il existerait un morphisme (normal) de $B \overset{c}{\otimes} B'$ sur $\mathcal{L}(H)$ — ce qui n'est pas le cas;

(ii) que $A_2 = 0$ ou, ce qui revient au même, qu'une algèbre de von Neumann A non nulle, dont le centre est sans atomes, n'est pas plate. Ce centre C est isomorphe à une algèbre $L^\infty(Z, \nu)$, où Z est un espace localement compact et ν une mesure positive diffuse sur Z; on vérifie aisément que $C \overset{c}{\otimes} C$ est isomorphe à $L^\infty(Z \times Z, \nu \otimes \nu)$; réalisons A dans un espace hilbertien H, notons A' son commutant et B l'algèbre de von Neumann engendrée par A et A'; on a un objet normal de la catégorie $\mathcal{C}_{A\otimes A'}$: $u : A \otimes A' \to B$ défini par

$$u\left(\sum_i a_i \otimes a'_i\right) = \sum a_i a'_i;$$

si A était plate il existerait un morphisme (normal) $v : A \overset{c}{\otimes} A' \to B$ transformant $a \otimes a'$ en aa' quels que soient $a \in A$ et $a' \in A'$; identifiant C et $C \overset{c}{\otimes} C$ respectivement à $L^\infty(Z, \nu)$ et $L^\infty(Z \times Z, \nu \otimes \nu)$ on voit que v devrait transformer $f \otimes g$ en fg quelles que soient f et $g \in L^\infty(Z, \nu)$; on va achever la démonstration en prouvant que le morphisme v de la sous-algèbre $L^\infty(Z, \nu) \otimes L^\infty(Z, \nu)$ de $L^\infty(Z \times Z, \nu \otimes \nu)$ dans $L^\infty(Z, \nu)$ défini par $v(f \otimes g) = fg$ n'est pas normal.

La diagonale D de $Z \times Z$ est $\nu \otimes \nu$ — localement négligeable, puisque ν est diffuse; $Z \times Z - D$ est réunion d'une famille d'ouverts de la forme $U_i \times V_i$; soient f_i et g_i les fonctions caractéristiques de U_i et v_i; la famille $(f_i \otimes g_i)$ a pour borne supérieure dans $L^\infty(Z \times Z, \nu \otimes \nu)$ la fonction 1; mais $v(f_i \otimes g_i)$ est nul pour tout i; v n'est donc pas normal.

Remarque 8.2. — Une limite inductive d'algèbres de von Neumann plates n'est pas nécessairement plate; car dans le premier exemple de la remarque 7.2, les A_i sont plates tandis que leur limite inductive admet un quotient (à savoir A) qui est un facteur continu.

6. **Produits tensoriels d'algèbres de von Neumann discrètes.**

PROPOSITION 8.7. — $A_1 \overset{\mu}{\otimes} A_2$ est discrète si et seulement si A_1 et A_2 le sont.

Supposons d'abord $A_1 \overset{\mu}{\otimes} A_2$ discrète; alors $A_1 \overset{c}{\otimes} A_2$, qui en est un quotient, est discrète et A_1 et A_2 sont discrètes d'après [12], cor. de la prop. 3. Supposons maintenant A_1 et A_2 discrètes; comme $A_1 \overset{\mu}{\otimes} A_2$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par les deux algèbres de von Neumann discrètes et permutables $A_1 \otimes e_{A_2}$ et $e_{A_1} \otimes A_2$, on est ramené à démontrer ceci : si A_1 et A_2 sont deux algèbres de von Neumann dans un espace hilbertien H, discrètes et permutables, l'algèbre de von Neumann A engendrée par A_1 et A_2 est discrète.

Écrivons $A = A_{F_1} \times A_{F_2}$, où F_1 et F_2 sont des projecteurs du centre de A, orthogonaux et de somme 1, A_{F_1} étant discrète et A_{F_2} continue (*cf.* [2], p. 121); comme $F_2 \in A'_i \cap A'_2$, l'algèbre A_{F_2} est engendrée par $(A_1)_{F_2}$ et $(A_2)_{F_2}$ (*cf.* [2], p. 18) qui sont des algèbres de von Neumann discrètes et permutables; la proposition sera démontrée si l'on prouve que $F_2 = 0$, et finalement si l'on prouve ce qui suit : A_1 et A_2 sont deux algèbres de von Neumann dans un espace hilbertien H, discrètes et permutables, l'algèbre de von Neumann A engendrée par A_1 et A_2 n'est pas continue, i.e. contient un projecteur abélien non nul ([2], p. 123).

Soit donc E_i un projecteur abélien de A_i, de support central 1 ; montrons d'abord que $E_1 E_2 \neq 0$; dans le cas contraire on aurait $E_1 \leq 1 - E_2 \in A'_1$; pour $T \in A_1$ et $x \in E_1(H)$ on aurait $Tx \in H - E_2(H) \neq H$, ce qui est absurde puisque les Tx engendrent H. Montrons maintenant que $E = E_1 E_2$ est un projecteur abélien de A; A est engendrée par les opérateurs $S_1 S_2$ ($S_i \in A_i$), donc ([2], p. 18) A_E est engendrée par les opérateurs $(S_1 S_2)_E$ et l'on est ramené à vérifier que si S_i et $T_i \in A_i$, les opérateurs $(S_1 S_2)_E$ et $(T_1 T_2)_E$ sont permutables — ce qui ne présente pas de difficulté.

7. **Remarques diverses.**

Remarque 8.3. — Si A est un facteur continu dans un espace hilbertien et A' son commutant, $A \overset{\mu}{\otimes} A'$ n'est *ni un facteur, ni continue, ni de type fini*; en effet elle admet un quotient isomorphe à $A \overset{c}{\otimes} A'$ qui est un facteur continu et, d'après la démonstration de la propriété 8.6 (i), un autre quotient qui est un facteur de type I .

Remarque 8.4. — (Propriétés de dénombrabilité). Si A_1 et A_2 sont ultra-faiblement séparables, il en est de même de $A_1 \overset{\mu}{\otimes} A_2$; car si $(a_{i,n})$ est une suite ultra-faiblement dense dans A_i, la suite formée des sommes finies d'éléments $a_{1,n} \otimes a_{2,p}$ est ultra-faiblement dense dans $A_1 \otimes A_2$, et celle-ci est ultra-faiblement dense dans $A_1 \overset{\mu}{\otimes} A_2$.

Par contre, A_1 et A_2 peuvent être de genre dénombrable sans que $A_1 \overset{\mu}{\otimes} A_2$ le soit; prenons en effet $A_1 = A_2 = L^\infty(\mathbf{R})$; pour tout a réel on a une représentation π_a de $A_1 \otimes A_2$ dont les restrictions à A_1 et A_2 sont normales, dans $L^2(\mathbf{R})$: $\pi_a(\Sigma f_i \otimes g_i)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $x \mapsto \Sigma f_i(x) . g_i(x-a)$; on va montrer que les représentations π_a sont deux à deux disjointes, ce qui entraînera que les projecteurs centraux correspondants de $A_1 \overset{\mu}{\otimes} A_2$ sont deux à deux orthogonaux (*cf.* remarque 8.1).

Soient donc $a \neq b$; un sous-espace stable par $\operatorname{Im} \pi_a$ (resp. $\operatorname{Im} \pi_b$) est nécessairement de la forme $H = L^2(E)$ [resp. $K = L^2(F)$] avec E et $F \subset \mathbf{R}$; supposons $(\pi_a)_H$ équivalente à $(\pi_b)_K$; comme on a $\pi_a((\chi_F \otimes 1))_H = 1$ on doit avoir $(\pi_b(\chi_F \otimes 1))_K = 1$, ce qui entraîne $F \subset E$; de la même façon $E \subset F$, d'où $E = F$; soit alors U un isomorphisme d'entrelacement pour $(\pi_h)_H$ et $(\pi_b)_K$; on a

$$U . \pi_a(f \otimes 1) = \pi_b(f \otimes 1) . U \quad \text{pour toute } f \in L^\infty(\mathbf{R}),$$

donc U est l'opérateur de multiplication par une fonction h de module 1; alors pour toute $g \in L^\infty(\mathbf{R})$ on a

$$h(x).g(x-a) = h(x).g(x-b) \quad \text{pour} \quad \text{tout } x \in E,$$

ce qui n'est possible que si E est négligeable, d'où $H = K = 0$.

Remarque 8.5. — Dans la catégorie $\mathcal{C}^*$, le produit tensoriel $A_1 \overset{*}{\otimes} A_2$ est le plus petit au sens suivant : pour tout morphisme $A_1 \otimes A_2 \to B$ injectif et à image dense, il existe un morphisme surjectif $B \to A_1 \overset{*}{\otimes} A_2$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d] \\ A_1 \otimes A_2 \arrow[ur] \arrow[r] & A_1 \overset{*}{\otimes} A_2 \end{tikzcd}$$

(ceci parce que la norme $\| \ \|_*$ sur $A_1 \otimes A_2$ est la plus petite norme compatible; *cf.* [13]). Dans la catégorie $\mathcal{W}^*$ il n'y a rien de semblable; car reprenons les algèbres B et B' de la démonstration de la proposition 8.6 (i) et les objets normaux $u : B \otimes B' \to \mathcal{L}(H)$ et $v : B \otimes B' \to B \overset{c}{\otimes} B'$; les morphismes u et v sont injectifs (pour v *voir* début du paragraphe 8; pour u cela résulte de [8], th. III); mais $\mathcal{L}(H)$ et $B \overset{c}{\otimes} B'$ n'ont aucun quotient commun.

§ 9. Algèbre de von Neumann enveloppante d'une C^*-algèbre.

La définition en a été donnée à la fin du paragraphe 4.

Soient A et B deux C^*-algèbres, $u : A \to B$ un morphisme (dans $\mathcal{C}^*$), $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ les algèbres de von Neumann enveloppantes, α et β les morphismes canoniques $A \to \mathcal{A}$ et $B \to \mathcal{B}$; il existe un morphisme (normal) unique $v : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tel que $v \circ \alpha = \beta \circ u$; autrement dit on a défini un foncteur « algèbre de von Neumann enveloppante », que nous noterons F, de $\mathcal{C}^*$ dans $\mathcal{W}^*$; il est facile de voir que F est adjoint à gauche du foncteur G qui associe à toute algèbre de von Neumann la C^*-algèbre sous-jacente et à tout morphisme normal le même morphisme considéré comme morphisme dans $\mathcal{C}^*$; ceci signifie que pour toute C-*algèbre A et toute algèbre de von Neumann $\mathcal{B}$ il existe une correspondance bijective entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}^*}(F(A), \mathcal{B})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^*}(A, G(\mathcal{B}))$, et que cette correspondance est « naturelle » en ce sens que si l'on a un morphisme (dans $\mathcal{W}^*$) $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$, le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{W}^*}(F(A), \mathcal{B}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^*}(A, G(\mathcal{B})) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{W}^*}(F(A), \mathcal{C}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^*}(A, G(\mathcal{C})) \end{tikzcd}$$

résultat analogue si l'on a un morphisme (dans $\mathcal{C}^*$) A $\to$B. Le foncteur F est donc fort à droite, et en particulier permute aux sommes, aux conoyaux de couples et aux limites inductives de systèmes inductifs.

Remarque 9.1. — Il est clair qu'avec les notations du début du paragraphe, $\operatorname{Im} v$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\beta(\operatorname{Im} u)$; on voit en particulier que F transforme les morphismes surjectifs en morphismes surjectifs.

Remarque 9.2. — Soient $u : A \to B$ un morphisme (dans $\mathcal{C}^*$) surjectif. $i : C \to A$ son noyau; alors $F(i)$ est injectif et l'on a $\operatorname{Im} F(i) = \operatorname{Ker} F(u)$,

En effet notons $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les algèbres de von Neumann enveloppantes de A, B, C; α, β, γ les morphismes canoniques; $j = F(i)$, $v = F(u)$. D'après [3], 2.10.4, il existe un morphisme $t : A \to \mathcal{C}$ tel que $t \circ i = \gamma$; puis il existe $k : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ tel que $k \circ \alpha = t$; alors

$$k \circ j \circ \gamma = k \circ \alpha \circ i = t \circ i = \gamma,$$

d'où

$$k \circ j = 1_{\mathcal{C}}$$

et j est injectif. Montrons maintenant que $\operatorname{Im} j = \operatorname{Ker} v$; $\operatorname{Im} j$ est la sous-algèbre de von Neumann de $\mathcal{A}$ engendrée par $\alpha(\operatorname{Ker} u)$; soit s le morphisme canonique $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\operatorname{Im} j$; comme $s \circ \alpha$ est nul sur $\operatorname{Ker} u$, il existe $r : B \to \mathcal{A}/\operatorname{Im} j$ tel que $r \circ u = s \circ \alpha$; puis il existe $q : \mathcal{B} \to \mathcal{A}/\operatorname{Im} j$ tel que $q \circ \beta = r$; on a alors

$$q \circ v \circ \alpha = q \circ \beta \circ u = r \circ u = s \circ \alpha,$$
$$q \circ v = s,$$
$$\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} s = \operatorname{Im} j;$$

d'autre par l'inclusion $\operatorname{Im} j \subset \operatorname{Ker} v$ est évidente.

On ignore si F transforme tous les morphismes injectifs en morphismes injectifs.

Remarque 9.3. — Le foncteur F ne permute pas aux produits; plus précisément soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de C^*-algèbres et soient $\alpha_i : A_i \to F(A_i)$ les morphismes canoniques; les morphismes canoniques $\Pi A_i \to A_j$, composés avec les α_j, définissent un morphisme $\Pi A_i \to \Pi F(A_i)$, d'où un morphisme (normal) $u : F(\Pi A_i) \to \Pi F(A_i)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif pour tout j :

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[d, "\alpha_j"'] & \Pi A_i \arrow[l] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & F(\Pi A_i) \arrow[dl, "u"] \\
F(A_j) & \Pi F(A_i) \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

u est trivialement surjectif, mais non injectif en général : si l'on prend par exemple $A_i = \mathbf{C}$ on a $F(A_i) = \mathbf{C}$ mais α n'est pas un isomorphisme.

PROPOSITION 9.1. — *Le foncteur F permute aux produits tensoriels $\overset{\vee}{\otimes}$ et $\overset{\mu}{\otimes}$; plus précisément si A_1 et A_2 sont deux C*-algèbres il existe un* isomorphisme de $F(A_1 \overset{\vee}{\otimes} A_2)$ sur $F(A_1) \overset{\mu}{\otimes} F(A_2)$ induisant l'identité sur $A_1 \otimes A_2$. [On rappelle que tout morphisme u de $A_1 \otimes A_2$ dans une C^*-algèbre B vérifiant

$$\| u(a_1 \otimes a_2) \| \leqq \| a_1 \| \, . \, \| a_2 \| \quad \text{pour tous } a_i \in A_i$$

se prolonge en un morphisme de $A_1 \overset{\vee}{\otimes} A_2$ dans B; et par ailleurs que si B est une algèbre de von Neumann, u peut s'écrire

$$u(a_1 \otimes a_2) = u_1(a_1) \, . \, u_2(a_2),$$

où u_1 et u_2 sont deux morphismes de A_1 et A_2 dans B vérifiant

$$u_1(a_1) \, . \, u_2(a_2) = u_2(a_2) \, . \, u_1(a_1) \quad \text{pour tous } a_i A_i;$$

cf. [7].]

Soient

$$\alpha_i : \quad A_i \to F(A_i), \qquad \alpha : \quad A_1 \overset{\vee}{\otimes} A_2 \to F(A_1 \overset{\vee}{\otimes} A),$$

$$u : \quad A_1 \otimes A_2 \to A_1 \overset{\vee}{\otimes} A_2, \qquad v : \quad F(A_1) \otimes F(A_2) \to F(A_1) \overset{\mu}{\otimes} F(A_2)$$

les morphismes canoniques; d'après la première remarque ci-dessus il existe $a : A_1 \overset{\vee}{\otimes} A_2 \to F(A_1) \overset{\mu}{\otimes} F(A_2)$ tel que $a \circ u = v \circ (\alpha_1 \otimes \alpha_2)$; puis il existe un morphisme normal $b : F(A_1 \overset{\vee}{\otimes} A_2) \to F(A_1) \overset{\mu}{\otimes} F(A_2)$ tel que $b \circ \alpha = a$.

D'après la deuxième remarque ci-dessus il existe des morphismes $w_i : A_i \to F(A_1 \overset{\vee}{\otimes} A_2)$ tels que

$$\alpha(u(a_1 \otimes a_2)) = w_1(a_1) \, . w_2(a_2) = w_2(a_2) \, w_1(a_1)) \qquad \text{pour} \quad a_i \in A_i;$$

d'où des morphismes normaux $t_i : F(A_i) \to F(A_1 \overset{\vee}{\otimes} A_2)$ tels que $t_i \circ \alpha_i = w_i$; il est immédiat que

$$t_1(x_1) \, . \, t_2(x_2) = t_2(x_2) \, . \, t_1(x_1) \qquad \text{pour} \quad x_i \in F(A_i)$$

d'où un morphisme normal $d : F(A_1) \overset{\mu}{\otimes} F(A_2) \to F(A_1 \overset{\vee}{\otimes} A_2)$ tel que

$$d(x_1 \otimes x_2) = t_1(x_1) \, . t_2(x_2) \qquad \text{pour } x_i \in F(A_i);$$

si l'on pose $c = d \circ v$ on a donc $c \circ (\alpha_1 \otimes \alpha_2) = \alpha \circ u$.

On a alors

$$b \circ d \circ v \circ (\alpha_1 \otimes \alpha_2) = b \circ c \circ (\alpha_1 \otimes \alpha_2) = b \circ \alpha \circ u = a \circ u = v \circ (\alpha_1 \otimes \alpha_2),$$

d'ou $b \circ d =$ identité; enfin

$$d \circ b \circ \alpha \circ u = d \circ a \circ u = d \circ v \circ (\alpha_1 \otimes \alpha_2) = c \circ (\alpha_1 \otimes \alpha_2) = \alpha \circ u,$$

d'ou $d \circ b =$ identité.

COROLLAIRE. — L'algèbre de von Neumann du produit direct de deux groupes localement compacts G_1 et G_2 est canoniquement isomorphe au produit tensoriel $\overset{\mu}{\otimes}$ des algèbres de von Neumann de G_1 et G_2.

En effet la C^*-algèbre de $G_1 \times G_2$ est canoniquement isomorphe au produit tensoriel $\overset{\vee}{\otimes}$ des C^*-algèbres de G_1 et G_2 (*cf.* [7], th. 3).

[Précisons qu'on entend par algèbre de von Neumann d'un groupe G l'algèbre de von Neumann enveloppante de la C^*-algèbre de G; cette algèbre de von Neumann est étudiée dans [4] et [5] sous le nom de « big group algebra »; notons à ce propos que l'application qui à tout groupe localement compact associe son algèbre de von Neumann, peut, de façon évidente, être considérée comme un foncteur L et que L transforme morphismes surjectifs en morphismes surjectifs; ceci permet de retrouver la correspondance étudiée dans [5] entre sous-groupes fermés distingués de G et projecteurs centraux de $L(G)$. On ignore si L est un foncteur adjoint.]

Remarque 9.4. — Le foncteur F ne permute pas aux produits tensoriels $\overset{*}{\otimes}$ et $\overset{c}{\otimes}$; plus précisément soient A_1 et A_2 deux C^*-algèbres; si l'on réalise $F(A_i)$ dans un espace hilbertien H_i et $F(A_1) \overset{c}{\otimes} F(A_2)$ dans $H_1 \otimes H_2$, $A_1 \overset{*}{\otimes} A_2$ se trouve réalisée dans $H_1 \otimes H_2$; en d'autres termes il existe un morphisme $A_1 \overset{*}{\otimes} A_2 \to F(A_1) \otimes F(A_2)$ induisant l'identité sur $A_1 \otimes A_2$; d'où un morphisme normal $u : F\left(A_1 \overset{*}{\otimes} A_2\right) \to F(A_1) \overset{c}{\otimes} F(A_2)$ induisant l'identité sur $A_1 \otimes A_2$; u est surjectif, mais non injectif en général; car si l'on prend par exemple $A_1 = A_2$ commutative à spectre connexe on a

$$F\left(A_1 \overset{*}{\otimes} A_2\right) = F\left(A_1 \overset{\vee}{\otimes} A_2\right) = F(A_1) \overset{\mu}{\otimes} F(A_2) \neq F(A_1) \overset{c}{\otimes} F(A_2).$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOURBAKI (N.). — *Algèbre commutative.* Chapitre I.

[2] DIXMIER (J.). — *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien.* — Paris, Gauthier-Villars, 1957.

[3] DIXMIER (J.). — *Les C^*-algèbres et leurs représentations.* — Paris, Gauthier-Villars, 1964.

[4] ERNEST (J.). — A new group algebra for locally compact groups, *Amer. J. Math.*, t. 86, 1964, p. 467-492.

[5] ERNEST (J.). — A new group algebra for locally compact groups, II, *Canad. J. Math.*, t. 17, 1965, p. 604-615.

[6] GLIMM (J.). — On a certain class of operator algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 95, 1960, p. 318-340.

[7] GUICHARDET (A.). — Sur les produits tensoriels de C^*-algèbres, *Doklady Akad. Nauk S.S.S.R.*, t. 160, 1965, p. 986-989 (en russe).

[8] MURRAY (F. J.) et VON NEUMANN (J.). — On rings of operators, *Ann. Math.*, t. 37, 1936, p. 116-229.

[9] POITOU (G.) et JAFFARD (P.). — *Introduction à la théorie des catégories.* — Paris, Offilib, 1965.

[10] RAINJONNEAU (M.). — Article à paraître sur la catégorie des C^*-algèbres.

[11] ROSENBERG (A.). — The number of irreducible representations of simple rings with no minimal ideals, *Amer. J. Math.*, t. 75, 1953, p. 523-530.

[12] SAKAÏ (S.). — On topological properties of W*-algebras, *Proc. Jap. Acad. Sc.*, t. 33, 1957, p. 439-444.

[13] TAKESAKI (M.). — On the cross-norm of the direct product of C^*-algebras, *Tohôku Math. J.*, t. 16, 1964, p. 111-122.

[14] KADISON (R. V.). — Operator algebras with a faithful weakly-closed representation, *Ann. Math.*, t. 64, 1956, p. 175-181.

[15] TAKEDA (Z.). — Inductive limit and infinite direct produit of operator algebras, *Tohôku Math. J.*, t. 7, 1955, p. 67-86.