SUR CERTAINS ESPACES CONSIDÉRÉS PAR M. H. STONE (*)

Par J. Dixmier

Dans un mémoire récent [11] (1), M. H. Stone a étudié les espaces compacts (2) dans lesquels l'ensemble des fonctions continues numériques est complètement réticulé. Ces espaces, que nous appellerons espaces stoniens, s'introduisent dans diverses applications. On a alors à mélanger des propriétés purement topologiques et des propriétés relevant de la théorie de la mesure. Nous nous proposons d'éclaircir les relations entre ces deux groupes de propriétés. Ceci nous amènera à étudier des mesures particulières sur les espaces stoniens (n.° 2), et à distinguer parmi les espaces stoniens des espaces plus particuliers, que nous appellerons espaces hyperstoniens (n.° 3).

Ces espaces sont déjà, en fait, intervenus dans de nombreux travaux. Ce sont en effet, comme on le verra aux n.°s 5 et 6, les spectres des algèbres du type L^∞ et des algèbres autoadjointes commutatives faiblement fermées d'opérateurs dans un espace hilbertien. Plusieurs des propriétés qui suivent sont déjà établies, au moins dans des cas particuliers ou implicitement, dans divers mémoires. Ce travail doit donc être considéré surtout comme une mise au point.

Notations

Nous utilisons en général les notations de N. Bourbaki. Précisons les points suivants.

Dans un ensemble ordonné par une relation d'ordre notée $\leq$, une famille $\mathfrak{F}$ d'éléments est dite filtrante croissante si, quels que soient $x \in \mathfrak{F}$ et $y \in \mathfrak{F}$, il existe un $z \in \mathfrak{F}$ avec $x \leq z$, $y \leq z$.

(*) Manuscrito recebido a 10 de Janeiro de 1951.

(1) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie.

(2) En réalité, M. H. Stone a considéré le cas plus général des espaces complètement réguliers.

Dans un espace topologique, un ensemble est dit rare si son adhérence a un intérieur vide et maigre s'il est réunion dénombrable d'ensemble rares (notations plus classiques: ensembles partout non denses, de première catégorie).

Pour la théorie de la mesure, le livre de N. BOURBAKI n'est pas encore paru. On pourra se reporter en partie à [2]. Sur un espace localement compact R, on appelle mesure positive μ une forme linéaire sur l'espace vectoriel $C(R)$ des fonctions continues sur R, nulles hors d'un compact, à valeurs complexes, telle que $\mu(f) \geq 0$ lorsque f appartient à l'ensemble $C^+(R)$ des fonctions ≥ 0 de $C(R)$. On prolonge ensuite μ (cf. [2]). Le support de μ est le complémentaire du plus grand ouvert de mesure nulle. Un ensemble est négligeable s'il est de mesure nulle pour μ, localement négligeable si son intersection avec tout compact est négligeable. Une fonction f à valeurs complexes est mesurable si, pour tout compact K et tout $\epsilon > 0$, existe un compact $K_1 \subset K$ tel que $\mu(K \cap \complement K_1) \leq \epsilon$ et tel que la restriction de f à K_1 soit continue; un ensemble est mesurable si sa fonction caractéristique est mesurable. On désignera par $L^1(R,\mu)$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes μ-sommables, où on identifie deux fonctions f_1, f_2 telles que $\int |f_1 - f_2| \, d\mu = 0$. On désignera par $L^\infty(R, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables bornées à valeurs complexes, où on identifie deux fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble localement négligeable. Si μ et ν sont deux mesures positives, et si tout ensemble localement négligeable pour μ est localement négligeable pour ν, il existe une fonction positive g, sommable pour μ sur tout compact (on dira: localement sommable) telle que $\int f d\nu = \int f g d\mu$ pour toute f qui est ν-sommable. On appelle mesure complexe μ une combinaison linéaire à coefficients complexes de mesures positives. Si μ est réelle, il existe une décomposition unique $\mu = \mu^+ - \mu^-$, avec μ^+ et μ^- positives, telle qu'aucune mesure positive $\neq 0$ ne minore μ^+ et μ^-: μ^+ et μ^- s'appellent les parties positive et négative de μ. Si $\mu = \mu_1{}^+ - \mu_1{}^- + i\,(\mu_2{}^+ - \mu_2{}^-)$, on appelle support de μ la réunion des supports de $\mu_1{}^+, \mu_1{}^-, \mu_2{}^+, \mu_2{}^-$. On désignera par $M(R)$ l'ensemble des mesures complexes sur R.

Les fonctions que nous considérerons seront le plus souvent soit à valeurs complexes, soit à valeurs réelles finies (et qualifiées alors de numériques) soit à valeurs réelles finies ou infinies, c'est-à-dire à valeurs dans la droite numérique complétée par un point $+\infty$ et un point $-\infty$ (ensemble qu'on désignera par $\overline{\mathbf{R}}$).

Enfin, nous désignerons toujours par χ_A la fonction caractéristique d'un ensemble A.

1. Résultats préliminaires

a. Soit $\mathfrak{A}$ *une algèbre normée complète commutative sur le corps complexe, possédant un élément unité e.* Supposons qu'il existe une application $x \to x^*$ de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}$ telle que:

$$x^{**}=x\ ;\ (\lambda x+\mu y)^*=\bar{\lambda}x^*+\bar{\mu}y^*;\ (xy)^*=y^*x^*\ ; \|x\,x^*\|=\|x\|\,.\,\|x^*\|\,.$$

Une telle application sera appelée une *involution.* Alors, d'après [6], il existe un espace compact E *tel que* $\mathfrak{A}$ *soit isomorphe, en tant qu'algèbre normée, à* $C(E)$; de plus, si $x \in \mathfrak{A}$ correspond à $f \in C(E)$, x^* correspond à la fonction complexe conjuguée de f.

Nous appellerons hermitiens les éléments $x \in \mathfrak{A}$ tels que $x=x^*$. Ils correspondent aux fonctions réelles de $C(E)$.

L'espace E est déterminé, à un homéomorphisme près, par la seule donnée de $\mathfrak{A}$. On l'appelle le *spectre* de $\mathfrak{A}$.

Sur l'ensemble des éléments hermitiens de $\mathfrak{A}$, on peut définir une relation d'ordre, en considérant comme *positifs* les éléments qui correspondent aux fonctions positives de $C(E)$, c'est-à-dire, les éléments qui peuvent se mettre sour la forme x^*x.

b. Nous appellerons *espaces stoniens* les espaces compacts E possédant la propriété suivante: *dans l'ensemble des fonctions continues numériques, toute famille majorée* $(f_i)_{i\in I}$ *admet une borne supérieure* f (ou, ce qui revient au même, toute famille minorée admet une borne inférieure)(3). La fonction f est en général distincte de l'enveloppe

(3) Soit donnée une famille majorée de fonctions numériques continues sur E. Considerons la famille dont les éléments sont les enveloppes supérieures des sous-familles finies de la première. Une de ces familles admet une borne supérieure si et seulement si l'autre admet une borne supérieure et ces bornes supérieures sont les mêmes. On peut donc se limiter à la considération des familles filtrantes croissantes.

supérieure (ou borne supérieure en chaque point) f' des f_i. Cependant, *f ne diffère de f' que sur un ensemble maigre.* En effet, il est évident que $f \geq f'$; et l'ensemble A_n des $x \in E$ tels que $f(x) - f'(x) \geq \frac{1}{n}$ (n entier > 0) est fermé (car f' est semi-continue inférieurement) et sans point intérieur (car, sinon on aurait $f_i \leq f - \frac{1}{n}$ sur un certain ensemble ouvert non vide indépendant de i, de sorte qu'il existerait une f_1 continue majorant les f et majorée strictement par f).

Toute fonction numérique bornée semi-continue inférieurement f sur un espace stonien E coïncide, sauf sur un ensemble maigre, avec une fonction continue (évidemment unique) qui n'est autre que la régularisée semi-continue supérieurement de f. En effet, comme E est compact, f est l'enveloppe supérieure de la famille $(f_i)_{i \in I}$ des fonctions continues majorées par f. D'après la remarque précédente, f est majorée par une fonction continue f' qui coïncide avec f sauf sur un ensemble maigre A. On a:

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leqq \limsup_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$$

D'autre part, si $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V de x_0 dans lequel $f'(x) \geq f'(x_0) - \epsilon$, et, comme $V \cap \complement A$ est non vide, il existe des $x \in V$ tels que $f(x) \geq f'(x_0) - \epsilon$. Donc $\limsup_{x \to x_0} f(x) \geq f'(x_0) - \epsilon$, et finalement $\limsup_{x \to x_0} f(x) = f'(x_0)$.

Les propriétés précédentes s'appliquent aussi aux fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$. Il suffit de remarquer que, si f est une fonction à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$, Arc tg f est une fonction numérique.

Considérant le cas des fonctions caractéristiques d'ensemble, on voit que, dans un espace stonien, *l'adhérence d'un ensemble ouvert est ouverte et fermée* (donc un espace stonien est totalement discontinu). Par dualité, l'intérieur d'un ensemble fermé est ouvert et fermé.

Soit G un ensemble ouvert partout dense dans E. *Toute fonction continue f à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ définie sur G se prolonge* (évidemment *d'une manière unique) en une fonction continue f' à valeurs dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *définie sur E.* Car soit f_1 la fonction définie de la manière suivante: 1. Si $x \in G$, $f_1(x)=f(x)$. 2. Si $x \in \complement G$, $f_1(x)=-\infty$. La fonction f_1 est semi-continue inférieurement, donc sa régularisée semi-continue supérieurement f' est continue. Et il est évident que $f'(x)=$ $=f_1(x)=f(x)$ pour $x \in G$.

Toutes ces remarques sont tirées de [11]. Cf. aussi [10] et [8].

Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre du type considéré en *a*. Son spectre est un espace stonien si et seulement si toute famille majorée d'éléments de $\mathfrak{A}$ admet une borne supérieure.

c. Soient E_1, E_2 deux espaces de Banach, et soit $\{x_1, x_2\} \rightarrow$ $\rightarrow <x_1, x_2>$ une forme bilinéaire continue sur $E_1 \times E_2$. Pour tout $x_2 \in E_2$, l'application $x_1 \rightarrow <x_1, x_2>$ est une forme linéaire continue sur E_1, c'est-à-dire un élément $\tilde{x}_2$ du dual E_1^* de E_1. Si l'application $x_2 \rightarrow \tilde{x}_2$ est un isomorphisme de l'espace normé E_2 sur l'espace normé E_1^*, nous dirons, par abus de langage, que E_2 est le dual de E_1 pour la forme bilinéaire $<x_1, x_2>$.

En particulier, soient E un espace de Banach, E^* son dual, E_1 un sous-espace vectoriel fermé de E^*. Si $x \in E$ et $x_1 \in E_1$, soit $<x, x_1>$ la valeur en x de la forme linéaire x_1. On a là une forme bilinéaire continue sur $E \times E_1$. Si E est le dual de E_1 pour cette forme bilinéaire, nous dirons que E est le dual du sous-espace E_1 de son dual. Dans ce cas, on peut identifier de manière évidente le bidual de E_1 à E^*, et l'application canonique de E_1 dans son bidual devient l'application identique.

Soient E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels fermés de E^* tels que $E_1 \subset E_2$. *Si E est le dual de E_1 et de E_2, on a $E_1 = E_2$.* En effet, si $E_1 \neq E_2$, il existe une forme linéaire continue non nulle sur E_2 qui s'annule sur E_1, donc un élément non nul de E orthogonal à E_1, ce qui est absurde.

d. Soient H un espace hilbertien, $\mathfrak{B}$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur H. Avec des conventions classiques, $\mathfrak{B}$ est un espace de Banach. Soit $\mathfrak{B}^*$ son dual. Soit $\mathfrak{C}$ l'ensemble des formes linéaires $A \rightarrow \sum_{i=1}^{n} <Ax_i, y_i>$ sur $\mathfrak{B}$ où $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ sont des vecteurs fixes de H. $\mathfrak{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{B}^*$, soit $\mathfrak{F}'$ son adhérence (pour respecter les notations de [5]). Avec les conventions de c, $\mathfrak{B}$ est le dual de $\mathfrak{F}'$. Une sous-algèbre autoadjointe de $\mathfrak{B}$ est faiblement fermée dans $\mathfrak{B}$ (au sens classique de la topologie faible des opérateurs) si et seulement si elle est fermée pour la topologie "faible" de $\mathfrak{B}$ considéré comme le dual de $\mathfrak{F}'$ (sur tout ceci, cf. [5])

Soit alors $\mathfrak{A}$ une sous-algèbre auto-adjointe faiblement fermée de $\mathfrak{B}$ et soit $\mathfrak{A}^o$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{F}'$ orthogonaux à $\mathfrak{A}$. D'après ce qui précède, $\mathfrak{A}$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{F}'$ orthogonaux à $\mathfrak{A}^o$. Considérons l'espace de Banach $\mathfrak{F}'/\mathfrak{A}^o$. La forme bilinéaire qui établit la dualité entre $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{F}'$ fournit, par passage au quotient, une forme bilinéaire qui établit une dualité entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{F}'/\mathfrak{A}^o$ et il est classique que $\mathfrak{A}$ est ainsi le dual de $\mathfrak{F}'/\mathfrak{A}^o$. Soit $\mathfrak{A}_1$ l'image canonique de $\mathfrak{F}'/\mathfrak{A}^o$ dans le dual $\mathfrak{A}^*$ de $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ est le dual de $\mathfrak{A}_1$. Comme $\mathfrak{E}$ est partout dense dans $\mathfrak{F}'$, l'image $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{E}$ par l'application canonique de $\mathfrak{F}'$ dans $\mathfrak{F}'/\mathfrak{A}^o$ est partout dense dans $\mathfrak{F}'/\mathfrak{A}^o$, donc l'image de $\mathfrak{F}$ par l'application canonique de $\mathfrak{F}'/\mathfrak{A}^o$ dans $\mathfrak{A}^*$ est partout dense dans $\mathfrak{A}_1$. Autrement dit:

Considérons, dans le dual $\mathfrak{A}^*$ de $\mathfrak{A}$, l'ensemble des formes linéaires du type $A \rightarrow \sum_{i=1}^{n} <Ax_i, y_i>$, où $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ sont des vecteurs fixes de H. Soit $\mathfrak{A}_1$ l'adhérence de cet ensemble. $\mathfrak{A}$ *est le dual de* $\mathfrak{A}_1$.

2. Mesures normales

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace stonien.

Définition 1 — *Une mesure positive μ sur E sera dite normale si elle possède la propriété suivante: pour toute famille filtrante croissante $(f_\iota)_{\iota \in I}$ de fonctions numériques continues sur E, de borne supérieure continue f, $\mu(f)$ est la borne supérieure des $\mu(f_\iota)$. Une mesure réelle sera dite normale si ses parties positive et négative sont normales. Une mesure complexe sera dite normale si ses parties réelle et imaginaire sont normales.*

PROPOSITION 1 — *Pour qu'une positive μ sur E soit normale, il faut et il suffit que tout ensemble rare soit μ-négligeable.*

Démonstration — Soient μ une mesure positive normale, A un ensemble rare, et montrons que $\mu(A)=0$. Les fonctions caractéristiques des ensembles ouverts et fermés contenant A forment une famille filtrante décroissante $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions continues, minorées par la fonction 0. Soit f la borne inférieure continue des f_i. On a $f(x)\geq 0$ pour tout $x \in E$, et $f(x)\leq 0$ pour tout x extérieur à A; donc $f(x)=0$ sur un ensemble partout dense, et finalement $f=0$. La borne inférieure des $\mu(f_i)$ est donc $\mu(0)=0$. D'où $\mu(A)=0$.

Réciproquement, soit μ une mesure positive telle que tout ensemble rare soit μ-négligeable. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille filtrante croissante majorée de fonctions numériques continues sur E, et soit f sa borne supérieure continue. Soit f' l'enveloppe supérieure des f_i. On sait que $\mu(f')$ est la borne supérieure des $\mu(f_i)$. D'autre part, f' diffère de f seulement sur un ensemble maigre (n.° 1, b), donc μ-négligeable. Donc $\mu(f)=\mu(f')$.

PROPOSITION 2 — *Soit μ une mesure positive normale sur E. Soit f une fonction μ-mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$, f_1(resp. f_2) sa régularisée semi-continue inférieurement (resp. supérieurement), f_1'(resp. f_2') la régularisée semi-continue supérieurement (resp. inférieurement) de f_1 (resp. f_2). Les fonctions f_1' et f_2' sont continues. Les fonctions f, f_1, f_2, f_1', f_2' coïncident sauf sur un ensemble μ-négligeable.*

Démonstration — On a vu au n°. 1, b, que f_1' (resp. f_2') est continue et coïncide avec f_1(resp. f_2) sauf sur un ensemble maigre, donc μ-négligeable (prop. 1). Prouvons que f coïncide avec f_1 et f_2 sauf sur un ensemble μ-négligeable. Il existe une suite d'ensemble compacts $K_1, K_2,\ldots$ tels que le complémentaire K de $\bigcup_n K_n$ soit μ-négligeable, et tels que la restriction de f à chaque K_n soit continue. Soit K_n' l'intérieur de K_n, et K' le complémentaire de $\bigcup_n K_n'$. Comme $K_n \cap \complement K_n'$ est rare, K' est encore μ-négligeable (prop. 1). D'autre part, on a évidemment $f=f_1=f_2$ sur chaque K_n', ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE — *Soit μ une mesure positive normale sur E. Soit A un ensemble μ-mesurable. A coïncide, à un ensemble μ-négligeable près, avec son adhérence $\bar{A}$, avec l'intérieur $\mathring{A}$, avec l'intérieur de $\bar{A}$, et avec l'adhérence de $\mathring{A}$.*

PROPOSITION 3 — *Une mesure normale a un support ouvert et fermé.*

Démonstration — Soient μ une mesure positive normale, F son support. F est fermé, l'intérieur G de F est ouvert et fermé. $F \cap \complement G$ est rare, donc μ-négligeable. Donc $\complement G$ est μ-négligeable, de sorte que $F \subset G$, et finalement $F = G$. Le cas d'une mesure complexe est alors immédiat.

PROPOSITION 4 — *Dans l'espace de Banach $M(E)$ des mesures complexes sur E, l'ensemble $M'(E)$ des mesures normales est un sous--espace vectoriel fermé.*

Démonstration — Si μ et ν sont des mesures normales, $\mu+\nu$ est normale. En effet, il suffit évidemment de prouver ceci pour μ et ν réelles. Alors $\mu^+, \mu^-, \nu^+, \nu^-$ (parties positives et négatives de μ et ν) sont normales, donc tout ensemble rare est négligeable pour ces mesures, et à fortiori pour $(\mu+\nu)^+ \leq \mu^+ + \nu^+$ et $(\mu+\nu)^- \leq \leq \mu^- + \nu^-$.

Si μ est normale, $a\mu$ est normale pour tout nombre complexe a, comme on le voit aussitôt à l'aide de ce qui précède.

Soit maintenant μ_n une suite de mesures normales tendant fortement dans $M(E)$ vers une mesure μ. Prouvons que μ est normale. On sait que $\mu_n{}^+$ tend fortement vers μ^+ et $\mu_n{}^-$ vers μ^-. On peut donc se limiter au cas où μ_n et μ sont positives. Soit A un ensemble rare, et soit $\epsilon > 0$. Pour n assez grand, $\|\mu - \mu_n\| \leq \epsilon$. Il existe un ensemble ouvert et fermé $G \supset A$ tel que $\mu_n(G) \leq \epsilon$. Alors, $\mu(G) \leq 2\epsilon$. Donc $\mu(A) = 0$: μ est normale.

Les notions suivantes, et les résultats correspondants du n.° 3, nous serviront dans un article sur les anneaux d'opérateurs. Les notations sont adaptées à cet article. Soit $\mathbf{Z}$ l'ensemble des fonctions continues sur E à valeurs dans $[0, +\infty]$. Convenons une fois pour toutes que $0. + \infty = 0$. Si $f \in \mathbf{Z}$, $f' \in \mathbf{Z}$ et si λ est un nombre ≥ 0, on sait définir $f+f' \in \mathbf{Z}$ et $\lambda f \in \mathbf{Z}$. On peut aussi définir le produit ff'. Car $x \rightarrow f(x)f'(x)$ est une fonction semi-continue inférieurement, donc elle coïncide, sauf sur un ensemble maigre, avec une fonction continue unique qu'on notera ff'. Les opérations ainsi définies possèdent les propriétés usuelles (cf. l'article annoncé plus haut) et redonnent les opérations habituelles quand les fonctions considérées sont dans $C^+(E)$.

Définition 2 — *On appellera pseudo-mesure sur E toute application ψ de $\mathbf{Z}$ dans $[0, +\infty]$ telle que, si $f \in \mathbf{Z}$, $f' \in \mathbf{Z}$ et si λ est un nombre ≥ 0, on a $\psi(f+f') = \psi(f) + \psi(f')$ et $\psi(\lambda f) = \lambda\, \psi(f)$. Une pseudo-mesure ψ sera dite normale, si, $(f_i)_{i \in I}$ étant une famille filtrante croissante de fonctions de $\mathbf{Z}$ de borne supérieure $f \in \mathbf{Z}$, $\psi(f)$ est la borne supérieure des $\psi(f_i)$. Une pseudo-mesure ψ sera dite fidèle si $\psi(f) = 0$ entraîne $f = 0$. Une pseudo-mesure ψ sera dite essentielle si, pour toute $f \in \mathbf{Z}$, $f \neq 0$, il existe une $g \in \mathbf{Z}$, $g \leq f$, $g \neq 0$, avec $\psi(g) < +\infty$.*

Lemme 1 — *a) Soit μ une mesure normale sur E. L'application $f \rightarrow \mu(f)$ de $\mathbf{Z}$ dans $[0, +\infty]$ est une pseudo-mesure ψ normale essentielle, fidèle si et seulement si le support de μ est E, et telle que $\psi(f) < +\infty$ pour $f \in C^+(E)$.*

b) Si ψ est une pseudo-mesure normale telle que $\psi(1) < +\infty$, il existe une mesure normale μ et une seule telle que $\psi(f) = \mu(f)$ pour $f \in \mathbf{Z}$. On dira alors, par abus de langage, que ψ est une mesure normale.

c) Si $(\psi_i)_{i \in I}$ est une famille de pseudo-mesures normales, l'application $f \rightarrow \sum_{i \in I} \psi_i(f)$, où $f \in \mathbf{Z}$, est une pseudo-mesure normale.

Démonstration — Soit μ une mesure normale sur E. L'application $f \rightarrow \mu(f)$ de $\mathbf{Z}$ dans $[0, +\infty]$ est évidemment une pseudo--mesure. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille filtrante croissante de fonctions de $\mathbf{Z}$, de borne supérieure $f \in \mathbf{Z}$. Soit f' l'enveloppe supérieure des f_i. On sait que $\mu(f')$ est la borne supérieure des $\mu(f_i)$. D'autre part, f' coïncide avec f sauf sur un ensemble maigre donc μ-négligeable. Donc $\mu(f) = \mu(f')$, de sorte que la pseudo-mesure est normale. Les autres affirmations de a sont immédiates.

Si ψ est une pseudo-mesure normale telle que $\psi(1) < +\infty$, l'application $f \to \psi(f)$ de $C^+(E)$ dans $[0, +\infty]$ est à valeurs finies et est évidemment une mesure normale μ. Comme toute $f \in \mathbf{Z}$ est borne supérieure de la famille des fonctions de $C^+(E)$ majorées par f, on a, d'après le résultat précédent, $\psi(f) = \mu(f)$. D'où b.

Enfin, c résulte d'un raisonnement élémentaire.

3. Espaces hyperstoniens

Définition 3 — *Un espace stonien E sera dit hyperstonien si les mesures positives normales sur E ont des supports dont la réunion est partout dense. Il sera dit de genre dénombrable si toute famille d'ensembles ouverts et fermés non vides deux à deux disjoints est au plus dénombrable.*

Proposition 5 — *Soit E un espace hyperstonien, et soit $(\mu_i)_{i \in I}$ une famille de mesures positives normales dont les supports ont une réunion partout dense. Pour qu'un ensemble soit rare, il faut et il suffit qu'il soit négligeable pour toute μ_i.*

Démonstration — La condition est nécessaire (prop. 1) .Supposons maintenant qu'un ensemble A soit négligeable pour toute μ_i. Il en est de même de $\bar{A}$ (cor. de la prop. 2). Si $\bar{A}$ contenait un ensemble ouvert non vide G, il existerait une μ_i dont le support rencontrerait G, donc telle que $\mu_i(\bar{A}) \geq \mu_i(G) > 0$; d'où contradiction.

Corollaire — *Dans un espace hyperstonien, tout ensemble maigre est rare.*

Aux n°.s 5, 6, 7 nous construirons: 1. des exemples d'espaces hyperstoniens; 2. des exemples d'espaces stoniens dans lesquels existent des ensembles maigres non rares; 3. des exemples d'espaces stoniens non hyperstoniens dans lesquels tout ensemble maigre est rare.

Proposition 6 — *Soit E un espace hyperstonien, et soit $(\mu_i)_{i \in I}$ une famille de mesures positives normales, dont les supports ont une réunion partout dense. Soient f une fonction à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$, mesurable pour toute μ_i, f_1 (resp. f_2) sa régularisée semi-continue inférieurement (resp. supérieurement). La régularisée semi-continue su-*

périeurement f_1' *de* f_1 *est continue et coïncide avec la régularisée semi-continue inférieurement* f_2' *de* f_2. *Les fonctions* f, f_1, f_2, f_1' *coïncident sauf sur un ensemble rare.*

Démonstration — D'après la prop. 2, les fonctions f, f_1, f_2, f_1', f_2' coïncident sauf sur un ensemble négligeable pour toute μ_i, donc rare (prop. 5); et f_1', f_2' sont continues, donc, coïncidant sauf sur un ensemble rare, sont identiques.

Corollaire — *Avec les notations de la prop. 6, soit* A *un ensemble mesurable pour toute* μ_i. *L'intérieur de l'adhérence* $\bar{A}$ *de* A *est un ensemble* A' *ouvert et fermé qui coïncide avec l'adhérence de l'intérieur* $\mathring{A}$ *de* A. A, A', $\mathring{A}$, $\bar{A}$ *coïncident à un ensemble rare près.*

Lemme 2 — *Soit* E *un espace hyperstonien. Il existe une famille* $(G_i)_{i\in I}$ *d'ensembles ouverts et fermés deux à deux disjoints telle que:* 1. *La réunion des* G_i *est partout dense dans* E. 2. *Pour tout* $i \in I$, *existe une mesure normale* μ_i *de support* G_i.

Démonstration — Dans l'ensemble des mesures positives normales non nulles sur E, considérons les parties dont les éléments ont des supports disjoints deux à deux. Ordonnant l'ensemble de ces parties par inclusion, on obtient évidemment un ensemble inductif. Soit donc $(\mu_i)_{i\in I}$ une telle partie maximale, et soit G_i le support de μ_i, ouvert et fermé (prop. 3). La réunion des G_i est partout dense. Car, sinon, il existerait un ensemble G ouvert et fermé non vide disjoint des G_i, et une mesure positive normale μ dont le support rencontrerait G; la mesure $\mu\chi_G \neq 0$ serait normale (prop. 1) et son support serait disjoint des G_i ce qui est impossible puisque la famille $(\mu_i)_{i\in I}$ est maximale.

Proposition 7 — *Soit* E *un espace stonien.*

a) *Pour que* E *soit hyperstonien, il faut et il suffit qu'il existe sur* E *des pseudo-mesures normales fidèles et essentielles.*

b) *Pour que* E *soit hyperstonien de genre dénombrable, il faut et il suffit qu'il existe sur* E *des mesures normales de support* E.

Démonstration — Soit E un espace hyperstonien. Soient $(G_i)_{i\in I}$ et $(\mu_i)_{i\in I}$ deux familles ayant les propriétés du lemme 2. Pour toute

$f \in \mathbf{Z}$, posons $\psi(f) = \sum_{i \in I} \mu_i(f)$. L'application $f \to \psi(f)$ de $\mathbf{Z}$ dans $[0, +\infty]$ est une pseudo-mesure normale d'après le lemme 1, *a* et *c*. Si $\psi(f) = 0$ pour une $f \in \mathbf{Z}$, on a $\mu_i(f) = 0$ pour tout $i \in I$, donc $f(x) = 0$ pour $x \in G_i$, donc $f(x) = 0$ sur un ensemble partout dense et finalement $f = 0$: ψ est fidèle. Soit $f \in \mathbf{Z}$, $f \neq 0$. Il existe un $i \in I$ et un $x \in G_i$ tel que $f(x) > 0$; on a $f(y) \geq a$ pour un certain $a > 0$ dans un voisinage ouvert et fermé convenable V de x, et on peut supposer $V \subset G_i$; alors, $f \geq a\chi_V \neq 0$, et $\psi(a\chi_V) = a\mu_i(\chi_V) < +\infty$: ψ est essentielle.

Si E est hyperstonien de genre dénombrable, la famille des G_i est au plus dénombrable. On peut alors choisir les μ_i de façon que $\sum_{i \in I} \|\mu_i\| < +\infty$. Alors, $\psi(1) = \sum_{i \in I} \|\mu_i\| < +\infty$ de sorte que (lemme 1, *a* et *b*) ψ est une mesure normale de support E.

Réciproquement, soit ψ une pseudo-mesure normale fidèle essentielle sur l'espace stonien E, et prouvons que E est hyperstonien. Soit $(\mu_i)_{i \in I}$ la famille des mesures normales sur E, et soit G_i le support de μ_i. Si la réunion des G_i n'est pas partout dense, il existe un ensemble ouvert et fermé non vide G disjoint des G_i. Comme ψ est essentielle, il existe une fonction $g \in \mathbf{Z}$, avec $g \leq \chi_G$, $g \neq 0$, $\psi(g) < +\infty$. L'application $f \to \psi(fg)$ de $\mathbf{Z}$ dans $[0, +\infty]$ est une pseudo-mesure normale ψ' (cf. démonstration de la prop. 8), telle que $\psi'(1) = \psi(g) < +\infty$: c'est donc une mesure normale (lemme 1, *b*). Enfin, ψ est fidèle donc $\psi'(\chi_G) = \psi(\chi_G g) = \psi(g) > 0$, donc le support de ψ' rencontre G: contradiction.

Si de plus ψ est une mesure normale, E est de genre dénombrable. Car, si $(G_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles ouverts et fermés non vides deux à deux disjoints, on a $\sum_{i \in I} \psi(\chi_{G_i}) \leq \psi(1) < +\infty$, et $\psi(\chi_{G_i}) > 0$ pour tout i, donc I est au plus dénombrable.

Remarque — Dans le cas où, sur un espace hyperstonien E, existe une mesure positive normale μ de support E, les prop. 5 et 6 se simplifient: pour qu'un ensemble soit rare, il faut et il suffit qu'il soit μ-négligeable; une fonction mesurable coïncide, sauf sur un ensemble rare, avec une fonction continue unique (facile à préciser); un ensemble μ-mesurable coïncide, à un ensemble rare près, avec un ensemble ouvert et fermé unique.

PROPOSITION 8 — *Soient E un espace hyperstonien, ψ_0 une pseudo-mesure normale fidèle et essentielle sur E. Il existe une correspondance biunivoque entre les pseudo-mesures normales ψ sur E et les $g \in \mathbf{Z}$. Cette correspondance est définie par la formule $\psi(f) = \psi_0(fg)$ où $f \in \mathbf{Z}$. De plus, ψ est fidèle (resp. essentielle) si et seulement si $g(x) > 0$ (resp. $< +\infty$) sur un ensemble ouvert partout dense. Enfin, ψ est une mesure (normale) si et seulement si $\psi_0(g) < +\infty$.*

Si E est de genre dénombrable, on peut supposer que ψ_0 est une mesure normale. Alors, la formule précédente s'écrit $\psi(f) = \int_\Omega f(x)g(x)d\psi_0(x)$. La pseudo-mesure ψ est une mesure (normale) si et seulement si g est ψ_0-sommable.

Démonstration — Soit $g \in \mathbf{Z}$. L'application ψ définie par $\psi(f) = \psi_0(fg)$ est évidemment une pseudo-mesure sur E. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille filtrante croissante d'éléments de $\mathbf{Z}$, de borne supérieure $f \in \mathbf{Z}$. Les $f_i g$ forment une famille filtrante croissante majorée par fg, et, comme f est l'enveloppe supérieure des f_i sauf sur un ensemble rare, $f(x)g(x)$ est l'enveloppe supérieure des $f_i g$ sauf sur un ensemble rare, donc fg est la borne supérieure des $f_i g$, de sorte que $\psi_0(fg)$ est la borne supérieure des $\psi_0(f_i g)$: ψ est normale. La correspondance $g \to \psi$ est biunivoque. Car, si $g \neq g'$, on a par exemple $g(x) > g'(x)$ dans un certain ensemble ouvert et fermé non vide A. La fonction continue g' est finie, donc bornée, sur A. D'autre part, comme ψ_0 est essentielle, il existe une $h \in \mathbf{Z}$, avec $h \leq \chi_A$, $h \neq 0$, $\psi_0(h) < +\infty$; comme $h \neq 0$, h majore un nombre strictement positif sur un certain ensemble A' ouvert et fermé non vide contenu dans A, et on a aussitôt $\psi_0(\chi_{A'}) < +\infty$; d'où, comme g' est bornée sur A, $\psi_0(\chi_{A'}g') < +\infty$. Enfin, on a $g(x) > g'(x)$ sur A', donc il existe une fonction $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$, telle que $\chi_{A'}g = \chi_{A'}g' + k$; d'où $\psi_0(\chi_{A'}g) = \psi_0(\chi_{A'}g') + \psi_0(k)$; comme $\psi_0(k) \neq 0$ (car ψ_0 est fidèle) et $\psi_0(\chi_{A'}g') < +\infty$, on en déduit: $\psi_0(\chi_{A'}g) > \psi_0(\chi_{A'}g')$.

Si $g(x) > 0$ sur un ensemble ouvert partout dense, ψ est fidèle: car, si $f \in \mathbf{Z}$, $f \neq 0$, on a $fg \neq 0$, donc, $\psi_0(fg) \neq 0$. Réciproquement, si $g(x) = 0$ sur un ensemble ouvert et fermé non vide A, on a $\psi(\chi_A) = \psi_0(0) = 0$, et ψ est non fidèle.

Si $g(x) < +\infty$ sur un ensemble ouvert partout dense, ψ est essentielle; car, si $f \in \mathbf{Z}$, $f \neq 0$, il existe un ensemble ouvert et fermé non vide A tel que $f\chi_A \neq 0$ et $g(x) \leq M < +\infty$ pour $x \in A$. Soit $f' \leq f\chi_A$, $f' \neq 0$, telle que $\psi_0(f') < +\infty$ (on utilise le fait que ψ_0 est essentielle); on a: $\psi(f') = \psi_0(f'g) \leq \psi_0(f'M) < +\infty$; donc ψ est essentielle. Réciproquement, si $g(x) = +\infty$ sur un ensemble ouvert et fermé non vide A, pour toute fonction $f \neq 0$ de $\mathbf{Z}$ majorée par χ_A, on a $f \geq a\chi_B$, avec un certain $a > 0$ et un certain ensemble ouvert et fermé non vide $B \subset A$, donc $\psi(f) = \psi_0(fg) \geq a\psi_0(\chi_B g) = a.(+\infty).$ $.\,\psi_0(\chi_B) = +\infty$ car $\psi_0(\chi_B) > 0$ (puisque ψ_0 est fidèle): ψ n'est pas essentielle.

Enfin, partons d'une pseudo-mesure normale quelconque ψ. Considérons les familles $(G_i)_{i \in I}$ d'ensembles ouverts et fermés non vides, deux à deux disjoints, tels que $\psi(\chi_{G_i}) < +\infty$ et $\psi_0(\chi_{G_i}) < < +\infty$ pour tout $i \in I$. Soit une telle famille maximale que nous notons encore $(G_i)_{i \in I}$. Soient G la réunion des G_i, et G_0 l'intérieur, ouvert et fermé, de $\complement G$. Soit $f \in \mathbf{Z}$. Si $f(x) > 0$ pour un $x \in G_0$,

on a $\psi(f) = +\infty$: en effet, on a $f(x) \geq a > 0$ sur un ensemble A ouvert et fermé non vide contenu dans G_0; supposons $\psi(\chi_A) < +\infty$; soit f' une fonction non nulle de $\mathbf{Z}$ telle que $f' \leq \chi_A$ et $\psi_0(f') < +\infty$ (on utilise le fait que ψ_0 est essentielle); on a $f'(x) \geq a' > 0$ sur un ensemble B ouvert et fermé non vide contenu dans A; alors, $\chi_B \leq \leq a'^{-1}f'$, donc $\psi_0(\chi_B) < +\infty$; et $\psi(\chi_B) < +\infty$ puisque $B \subset A$; ceci est absurde puisque la famille $(G_i)_{i \in I}$ est maximale; donc $\psi(\chi_A) = = +\infty$ et par suite $\psi(f) \geq a\,\psi(\chi_A) = +\infty$.

Ceci établi, posons, pour $f \in \mathbf{Z}$: $\mu^i{}_0(f) = \psi_0(f\chi_{G_i})$ et $\mu^i(f) = = \psi(f\chi_{G_i})$. D'après le début du raisonnement et le lemme 1, b, $\mu^i{}_0$ et μ^i sont des mesures normales; le support de $\mu^i{}_0$ est G_i. Soit A un ensemble $\mu^i{}_0$-négligeable; $A \cap G_i$ est rare, donc μ^i-négligeable, donc A est μ^i-négligeable. D'après le théorème de Lebesgue-Nikodym, il existe une fonction positive $\mu^i{}_0$-sommable g_i' telle que $\psi(f\chi_{G_i}) = \mu^i(f) = \mu^i{}_0(g_i'f) = \psi_0(g_i'f\chi_{G_i})$. La fonction g_i' est $\mu^i{}_0$-mesurable, et peut être supposée nulle hors de G_i, donc elle coïncide, sauf sur un ensemble rare, avec une fonction $g_i \in \mathbf{Z}$, nulle hors de G_i, et on a encore: $\psi(f\chi_{G_i}) = \psi_0(fg_i)$. Soit g la fonction de $\mathbf{Z}$ égale à g_i sur G_i et à $+\infty$ sur G_0 (n.° 1, b). On va voir que $\psi(f) = = \psi_0(fg)$ pour $f \in \mathbf{Z}$.

Si $f(x) > 0$ pour un $x \in G_0$, on a vu que $\psi(f) = +\infty$; d'autre part, $fg(x) = +\infty$ sur un ensemble ouvert non vide, donc $\psi_0(fg) = +\infty$ parce que ψ_0 est fidèle. On peut donc supposer désormais $f(x) = 0$ pour $x \in G_0$. Les fonctions $\sum_{i \in J} f\chi_{G_i}$ (resp. $\sum_{i \in J} fg_i$) où J parcourt l'ensemble des parties finies de I, forment un ensemble filtrant croissant dont la borne supérieure continue est f (resp. fg). Donc $\psi(f)$ (resp. $\psi_0(fg)$) est la borne supérieure de $\psi(\sum_{i \in J} f\chi_{G_i})$ (resp. $\psi_0(\sum_{i \in J} fg_i)$). On a donc: $\psi(f) = \psi_0(fg)$.

4. Décompositions des espaces stoniens

PROPOSITION 9 — *Soit E un espace stonien. Il existe une partition de E et une seule en trois ensembles ouverts et fermés E_1, E_2, E_3, qui sont des espaces stoniens possédant les propriétés suivantes:*

a) Dans E_1, il existe un ensemble maigre partout dense; aucune mesure n'est normale, sauf la mesure 0.

b) E_2 est hyperstonien.

c) Dans E_3, tout ensemble maigre est rare; toute mesure est de support rare (donc non normale, sauf si elle est nulle).

Démonstration — Considérons l'ensemble des parties ouvertes de E dans lesquelles existent des ensembles maigres partout denses. Dans cet ensemble, considérons les sous-ensembles dont les éléments sont deux à deux disjoints. Soit, grâce au théorème de Zorn, $(G_i)_{i \in I}$ un tel sous ensemble maximal. Soit A_i^1, A_i^2, ... une suite d'ensembles rares dont la réunion est partout dense dans G_i. Soit $A^n = \bigcup_{i \in I} A_i^n$. Il est classique que A^n est rare; la réunion A des A^n est un ensemble maigre partout dense dans la réunion G des G_i donc aussi dans l'adhérence E_1 de G qui est un ensemble ouvet et fermé.

Dans le complémentaire E_1' de E_1, tout ensemble maigre est rare. Car s'il existait un ouvert non vide contenu dans E_1' dans lequel un ensemble maigre soit partout dense, la famille $(G_i)_{i \in I}$ ne serait pas maximale.

Soit μ une mesure positive normale de support contenu dans E_1. A, qui est maigre, est μ-négligeable, donc aussi son adhérence E_1 (prop. 2). Donc $\mu=0$.

Soit $(\mu_x)_{x\in K}$ la famille des mesures positives normales sur E. Soient $F_x \subset E_1'$ le support de μ_x, F la réunion des F_x, $E_2 \subset E_1'$ l'adhérence de F, qui est ouverte et fermée. Il est évident que E_2 est hyperstonien.

Soit enfin $E_3 = E_1' \cap \complement E_2$. Dans $E_3 \subset E_1'$, tout ensemble maigre est rare. D'autre part, par construction de E_2, il n'existe aucune mesure normale sur E_3 (sauf la mesure 0). Soit alors ν une mesure positive sur E_3. Soit a la borne supérieure des ν-mesures des ensembles rares. Il existe une suite $B_1, B_2, \ldots$ d'ensembles rares de E_3 tels que $\nu(B_n) \to a$. La réunion B des B_n est rare, donc $\nu(\overline{B}) \leq a$; mais $\nu(\overline{B}) \geq \nu(B_n)$, donc $\nu(\overline{B}) = a$. On va montrer que le support de ν est contenu dans $\overline{B}$. Soit en effet $G \subset E_3$ un ensemble ouvert et fermé disjoint de $\overline{B}$, et montrons que $\nu(G)=0$. Si C est un ensemble rare contenu dans G, $\overline{B} \cup C$ est rare, donc $\nu(\overline{B} \cup C) \leq a$, d'où $\nu(C)=0$; la restriction de ν à G définit donc une mesure normale, ce qui, on l'a vu plus haut, entraîne que cette restriction est nulle.

Reste à prouver l'unicité de la décomposition de la prop. 9. Soient E_1^*, E_2^*, E_3^* une partition de E en ensembles ouverts et fermés ayant les propriétés indiquées pour E_1, E_2, E_3 dans la proposition. Dans $E_1^* \cap (E_2 \cup E_3)$, il existe un ensemble maigre partout dense, donc $E_1^* \subset E_1$. E_2^* est hyperstonien, donc, par définition des espaces hyperstoniens et par construction de E_2, $E_2^* \subset E_2$. Enfin, on voit aisément que $E_3^* \cap E_1$ et $E_3^* \cap E_2$ sont vides, d'où $E_3^* \subset E_3$. Par conséquent, $E_i^* = E_i$ pour $i=1, 2, 3$.

Proposition 10 — *Soit E un espace hyperstonien. Il existe une famille $(E_i)_{i\in I}$ de parties ouvertes et fermées de E, deux à deux disjointes, dont la réunion est partout dense, et telles que chaque E_i est un espace hyperstonien de genre dénombrable.*

Démonstration — C'est une conséquence immédiate du lemme 2 et de la prop. 7.

REMARQUE — La prop. 10 fournit une nouvelle condition nécessaire, purement topologique, pour qu'un espace stonien soit hyperstonien.

5. Premier exemple d'espaces hyperstoniens

Soit R un *espace localement compact*, μ une *mesure positive* sur R. Soit $L^\infty(R,\mu)$ l'ensemble des fonctions *μ-mesurables et bornées* à valeurs complexes, dans lequel on identifie deux fonctions égales, sauf sur un ensemble *localement négligeable*. Si $f \in L^\infty(R,\mu)$, désignons par $\|f\|$ la borne supérieure essentielle de f, c'est-à-dire le plus petit nombre a tel que l'ensemble des $x \in E$ pour lesquels $|f(x)| > a$ soit localement négligeable. Définissons d'autre part une *involution* dans $L^\infty(R,\mu)$ en faisant correspondre à toute $f \in L^\infty(R,\mu)$ la fonction complexe conjuguée. On obtient alors une algèbre normée commutative avec unité, munie d'une involution, du type considéré au n.° 1, *a*. Les éléments positifs de l'algèbre ne sont autres que les fonctions positives en chaque point sauf sur un ensemble localement négligeable.

Le lemme qui suit est essentiellement connu.

LEMME 3 — *a) Toute famille majorée de fonctions réelles dans $L^\infty(R,\mu)$ admet une borne supérieure.*

b) Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille filtrante croissante majorée dans $L^\infty(R,\mu)$. Pour que $f \in L^\infty(R,\mu)$ soit la borne supérieure des f_i dans $L^\infty(R,\mu)$, il faut et il suffit que, pour toute fonction g positive μ-sommable, $\mu(fg)$ soit la borne supérieure des $\mu(f_ig)$.

c) Soit f une fonction semi-continue inférieurement et bornée, et $(f_i)_{i\in I}$ la famille des fonctions continues nulles hors d'un compact et majorées en tout point par f. La fonction f est la borne supérieure des f_i au sens de $L^\infty(R,\mu)$.

d) Soit $f \in L^\infty(R,\mu)$ et soit $(f_i)_{i\in I}$ la famille des fonctions semi-continues inférieurement bornées qui majorent f en tout point. La fonction f est la borne inférieure des f_i au sens de $L^\infty(R,\mu)$.

Démonstration — Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille filtrante croissante majorée dans $L^\infty(R,\mu)$. Pour toute fonction g positive μ-sommable, les nombres $\mu(f_ig)$ ont une borne supérieure finie, soit $\varphi(g)$. Si

$g \in L^1(R,\mu)$ est quelconque, de la forme $g_1 - g_2$, avec g_1 et g_2 positives et μ-sommables, posons $\varphi(g) = \varphi(g_1) - \varphi(g_2)$. Il est immédiat qu'on définit sans ambiguïté une forme linéaire continue sur $L^1(R,\mu)$, donc une $f \in L^\infty(R,\mu)$ telle que $\varphi(g) = \mu(fg)$. On a $\mu((f-f_i)g) \geq 0$ pour tout $i \in I$ et toute g positive μ-sommable, donc $f \geq f_i$ sauf sur un ensemble localement négligeable. D'autre part, si $f' \geq f_i$ pour tout $i \in I$ au sens de $L^\infty(R,\mu)$, on a $\mu(f'g) \geq \varphi(g)$ pour toute g positive μ-sommable, donc $\mu((f'-f)g) \geq 0$; donc $f' \geq f$ au sens de $L^\infty(R,\mu)$. Ainsi on a démontré à la fois le *a* et le *b* du lemme.

Maintenant, soit f une fonction semi-continue inférieurement bornée et $(f_i)_{i \in I}$ la famille des fonctions continues nulles hors d'un compact majorées en tout point par f. Soit $f' \in L^\infty(R,\mu)$, et supposons que $f'(x) < f(x)$ pour tous les x d'un ensemble non localement négligeable. On a alors $f'(x) \leq f(x) - \dfrac{1}{n}$, pour un entier n, et pour tous les x d'un ensemble compact K non négligeable; en diminuant au besoin K, on peut supposer de plus que f et f' sont continues sur K; alors, pour tout $y \in K$ existe un voisinage V_y de y et une fonction continue g_y, majorée par f, telle que $g_y(x) > f'(x)$ sur $V_y \cap K$; recouvrant K par un nombre fini de V_y, et prenant l'enveloppe supérieure des g_y correspondante, on a une fonction continue majorée par f et majorant strictement f' sur K. Donc f' ne majore pas les f_i au sens de $L^\infty(R,\mu)$, et on a prouvé le *c* du lemme.

Enfin, soit $f \in L^\infty(R,\mu)$ et soit $(f_i)_{i \in I}$ la famille des fonctions semi-continues bornées qui majorent f en tout point. Soit $f' \in L^\infty(R,\mu)$ et supposons $f'(x) > f(x)$ pour tous les x d'un ensemble non localement négligeable. Raisonnant comme précédemment, on détermine un compact K non négligeable sur lequel f et f' sont continues tel que $f'(x) > f(x)$ pour $x \in K$. La fonction f'' égale à f sur K et à une constante suffisamment grande sur $\complement K$, est semi-continue inférieurement, majore f en tout point, et ne majore pas f' au sens de $L^\infty(R,\mu)$.

Nous allons étudier le spectre de $L^\infty(R,\mu)$. La connexion avec [3] est donc ici particulièrement étroite.

THÉORÈME 1. — *Soit E un espace hyperstonien. Il existe un espace localement compact R, une mesure positive μ sur R, tels que le spectre de $L^\infty(R,\mu)$ soit E.*

Réciproquement, soient R un espace localement compact, μ une mesure positive sur R. Le spectre E de $L^\infty(R,\mu)$ est hyperstonien. Les mesures normales sur E définissent des formes linéaires sur $L^\infty(R,\mu)$ qui ne sont autres que les formes $f \to \int fg d\mu$, où $g \in L^1(R,\mu)$.

Démonstration — Soit E un espace hyperstonien. Il existe (lemme 2) une famille $(E_i)_{i\in I}$ de parties ouvertes et fermées deux à deux disjointes de E, dont la réunion R est partout dense dans E, et telles que ,pour tout $i \in I$, existe une mesure positive normale μ_i de support E_i. R est localement compact. Toute partie compacte de R, étant recouverte par la réunion des E_i, est contenue dans la réunion d'un nombre fini de E_i. Soit f une fonction numérique continue définie sur R, nulle en dehors d'une partie compacte de R; f se prolonge à E d'une manière unique en une fonction continue f'; on a $f'(x)=0$ pour $x \in \complement R$. La somme $\sum_{i\in I} \mu_i(f')$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, donc a un sens, et l'application $f \to \sum_{i\in I} \mu_i(f')$ définit évidemment une mesure positive sur R. Considérons l'algèbre $L^\infty(R,\mu)$. Nous allons voir qu'elle est isomorphe (en tant qu'algèbre normée à involution) à l'algèbre $C(E)$ des fonctions continues à valeurs complexes sur E. A toute fonction $\varphi \in C(E)$, faisons correspondre sa restriction $\tilde{\varphi}$ à R, qui est dans $L^\infty(R,\mu)$. L'application $\varphi \to \tilde{\varphi}$ est évidemment un homomorphisme de $C(E)$ dans $L^\infty(R,\mu)$, compatible avec les involutions. D'autre part $\|\varphi\| = \|\tilde{\varphi}\|$. En effet, $\|\tilde{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$ est évident; en outre, si $a < \|\varphi\|$, on a $|\varphi(x)| > a$ sur un ouvert non vide G; pour un $i \in I$, $G \cap E_i$ est non vide donc $\mu(G \cap E_i) = \mu_i(G \cap E_i) \neq 0$; donc $a < \|\tilde{\varphi}\|$ et finalement $\|\varphi\| = \|\tilde{\varphi}\|$. Reste à montrer que l'application $\varphi \to \tilde{\varphi}$ applique $C(E)$ *sur* $L^\infty(R,\mu)$. Or, soit $\psi \in L^\infty(R,\mu)$. Prolongeons ψ à E en une fonction ψ' en posant $\psi'(x)=0$ pour $x \in \complement R$. La fonction ψ' est mesurable pour toute μ_i(en effet, la restriction de ψ, donc de ψ', à E_i, est évidemment mesurable pour μ_i, et le complémentaire de E_i dans E est μ_i-négligeable), donc (prop. 6) ψ' coïncide, sauf sur un ensemble rare, avec une fonction continue

φ; $\tilde{\varphi}$ coïncide avec ψ sauf sur un ensemble A rare dans R; l'intersection de A avec tout E_i, donc avec tout compact de R, est négligeable pour toute μ_i, donc pour μ, de sorte que A est localement négligeable pour μ; on a donc $\psi = \tilde{\varphi}$ au sens de $L^\infty(R,\mu)$.

Maintenant, considérons un espace localement compact R et une mesure positive μ sur R. D'après le lemme 3, a, le spectre E de $L^\infty(R,\mu)$ est stonien. De plus, d'après le lemme 3, b, pour toute $g \in L^1(R,\mu)$, l'application $f \to \mu(fg)$ définit une forme linéaire sur $L^\infty(R,\mu)$ à laquelle correspond sur E une mesure normale. Si E n'était pas hyperstonien, il existerait une fonction non nulle de $C(E)$, d'intégrale nulle pour toute mesure normale. Autrement dit, il existerait une $f \in L^\infty(R,\mu)$, $f \neq 0$, telle que $\mu(fg) = 0$ pour toute $g \in L^1(R,\mu)$. Or ceci est impossible.

Il reste à prouver ceci: soit ψ une forme linéaire positive sur $L^\infty(R,\mu)$, telle que, si f est la borne supérieure dans $L^\infty(R,\mu)$ d'une famille filtrante croissante $(f_i)_{i \in I}$, $\psi(f)$ est la borne supérieure des $\psi(f_i)$; alors, il existe une fonction $g \in L^1(R,\mu)$ telle que $\psi(f) = \mu(fg)$. Or, la restriction de ψ à l'ensemble des fonctions continues nulles hors d'un compact définit une mesure positive ν sur R. Si f est positive semi-continue inférieurement et bornée et si $(f_i)_{i \in I}$ est la famille des fonctions positives continues nulles hors d'un compact majorées en tout point par f, on sait que $\nu(f)$ est la borne supérieure des $\nu(f_i)$. D'autre part, $\psi(f)$ est la borne supérieure des $\psi(f_i)$, d'après le lemme 3, c et d'après l'hypothèse faite sur ψ; donc $\psi(f) = \nu(f)$. Si enfin f est une fonction positive quelconque de $L^\infty(R,\mu)$, et si $(f_i)_{i \in I}$ est la famille des fonctions semi-continues inférieurement bornées majorant f en tout point, on sait que l'intégrale supérieure $\nu^*(f)$ de f pour ν est la borne inférieure des $\nu(f_i)$; d'autre part, $\psi(f)$ est la borne inférieure des $\psi(f_i)$, d'après le lemme 3, d et d'après l'hypothèse faite sur ψ; donc $\psi(f) = \nu^*(f)$. En particulier, si f positive est localement négligeable pour μ, on a $\psi(f) = 0$, donc $\nu^*(f) = 0$: f est ν-négligeable. D'après le théorème de Lebesgue-Nikodym, il existe une fonction g positive localement sommable pour μ, telle que $\nu = g\mu$. Comme de plus $g\mu(1) = \nu(1) = \psi(1) < +\infty$, g est μ-sommable. Finalement, toute $f \in L^\infty(R,\mu)$

est ν-mesurable et même ν-sommable, de sorte que $g\mu(f)=\nu(f)= =\nu^*(f)=\psi(f)$: le théorème est démontré.

COROLLAIRE — *Soit E un espace hyperstonien. L'espace de Banach $C(E)$ est le dual de l'espace de Banach $M'(E)$ des mesures normales sur E* (cf. n.° 1, c et prop. 4).

Démonstration — Il existe un isomorphisme $\mathfrak{J}$ de l'espace de Banach $C(E)$ sur un espace de Banach $L^\infty(R,\mu)$, où R est un espace localement compact et μ une mesure positive sur R. Le transposé ${}^t\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{J}$ est un isomorphisme du dual de $L^\infty(R,\mu)$ sur le dual $M(E)$ de $C(E)$; ${}^t\mathfrak{J}^{-1}$ applique le sous-espace $M'(E)$ des mesures normales sur E sur un sous-espace du dual de $L^\infty(R,\mu)$, qui, d'après le th. 1, s'identifie canoniquement à $L^1(R,\mu)$. Or $L^\infty(R,\mu)$ est le dual de $L^1(R,\mu)$, ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 11 — *Soient R un espace localement compact, μ une mesure positive sur R. Pour que le spectre E de $L^\infty(R,\mu)$ soit de genre dénombrable, il faut et il suffit que R soit, à un ensemble localement négligeable près, réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure finie.*

Démonstration — Si E est de genre dénombrable, il existe une mesure positive normale de support E. Il lui correspond (th. 1) une fonction positive μ-sommable g, qui possède la propriété suivante: si une fonction positive $f\in L^\infty(R,\mu)$ est telle que $\mu(fg)=0$, f est nulle, sauf sur un ensemble localement négligeable. Soit A_n l'ensemble des $x\in R$ tels que $g(x)\geq \frac{1}{n}$. Comme g est μ-sommable, A_n est de μ-mesure finie. Soit f la fonction caractéristique du complémentaire B de $\bigcup_n A_n$. On a $g(x)=0$ sur B, donc $\mu(fg)=0$, donc B est localement négligeable. Réciproquement, supposons qu'il existe une suite d'ensembles $A_1, A_2, \ldots$ de μ-mesure finie, telle que le complémentaire B de $\bigcup_n A_n$ soit localement négligeable. On peut supposer les A_n disjoints. Posant $g(x)=a_n>0$ pour $x\in A_n$ et $g(x)=0$ pour $x\in B$, on peut choisir les a_n de telle sorte que g soit μ-sommable. La fonction g définit une mesure positive normale sur E dont le support est E: en effet, si une fonction positive $f\in L^\infty(R,\mu)$ est telle que $\mu(fg)=0$, on a $f(x)=0$ pour $x\in A_n$, sauf sur un ensemble

μ-négligeable, donc $f(x)=0$ sauf sur un ensemble localement négligeable.

6. Deuxième exemple d'espaces hyperstoniens

THÉORÈME 2 — *Soit E un espace hyperstonien. Il existe un espace hilbertien H et une algèbre autoadjointe commutative faiblement fermée $\mathfrak{A}$ d'opérateurs sur H telle que le spectre de $\mathfrak{A}$ soit E.*

Réciproquement, si $\mathfrak{A}$ est une algèbre autoadjointe commutative faiblement fermée d'opérateurs sur un espace hilbertien H, son spectre E est hyperstonien. Les mesures normales sur E définissent des formes linéaires sur $\mathfrak{A}$ qui ne sont autres que les formes $A \rightarrow \sum_{i=1}^{n} < Ax_i, y_i >$ (où $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ sont des vecteurs fixes de H) et les limites de ces formes suivant la norme dans l'espace dual de $\mathfrak{A}$.

AJOUTÉ EN ÉPREUVES: par un raisonnement plus simple, R. Pallu de la Barrière a obtenu un résultat plus précis, à savoir que *toute mesure normale correspond à une forme linéaire $A \rightarrow < Ax, y >$.*

Démonstration — Soit E un espace hyperstonien, et supposons-le d'abord de genre dénombrable. Soit μ une mesure positive normale de support E. Soit H l'espace hilbertien des fonctions de carré sommable pour μ. A toute $f \in C(E)$, faisons correspondre l'opérateur borné A_f sur H défini par $A_f(h)=fh$. On définit ainsi une application $f \rightarrow A_f$ de $C(E)$ sur une algèbre autoadjointe commutative $\mathfrak{A}$ d'opérateurs bornés de H. Il est immédiat que cette application est un homomorphisme d'algèbres compatible avec les involutions, et on vérifie aussitôt que $\|A_f\|=\|f\|$. Nous allons prouver que $\mathfrak{A}$ est identique à l'ensemble $\mathfrak{A}'$ (faiblement fermé) des opérateurs qui permutent avec ceux de $\mathfrak{A}$. Comme $\mathfrak{A}$ est commutative, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$. Soit maintenant $A' \in \mathfrak{A}'$, et soit $\varphi = A'(1)$. Toute $f \in C(E)$ est dans H, et on a $A'(f)=A'A_f(1)=A_fA'(1)=A_f\varphi=\varphi f$. On en déduit d'abord que $\varphi \in L^\infty(E,\mu)$. En effet, supposons $|\varphi(x)| \geq a$ sur un ensemble B non μ-négligeable. B contient des ensembles fermés non μ-négligeables, donc des ensembles ouverts et fermés non vides; soit B' un tel ensemble. D'après ce qui précède, $\|A'(\chi_{B'})\| = \|\varphi\, \chi_{B'}\| \geq a\|\chi_{B'}\|$. On voit donc que $\varphi \in L^\infty(R,\mu)$, et par suite (prop. 6) φ coïncide, sauf sur un ensemble μ-négligeable, avec une fonction continue φ'. On a: $A' = A_{\varphi'} \in \mathfrak{A}$

Soit maintenant E un espace hyperstonien quelconque, et soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de parties ouvertes et fermées, deux à deux disjointes, dont chacune est de genre dénombrable, et dont la réunion est partout dense (prop. 10) .Pour tout $i \in I$, soient H_i un espace hilbertien, $\mathfrak{A}_i$ une algèbre autoadjointe commutative d'opérateurs dans H_i, telle que $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_i'$, et telle que le spectre de $\mathfrak{A}_i$ soit E_i. Soit H l'espace hilbertien somme directe orthogonale des H_i, et identifions les H_i à des sous-espaces de H. Pour toute $f \in C(E)$, soient f_i la restriction de f à E_i, et $A^f{}_i$ l'élément correspondant de $\mathfrak{A}_i$. Il existe un opérateur linéaire borné A^f et un seul dans H dont la restriction à H_i soit $A^f{}_i$ pour tout i. L'application $f \to A^f$ est, on le voit aussitôt, un isomorphisme d'algèbres normées compatible avec les involutions. Montrons enfin que l'image $\mathfrak{A}$ de $C(E)$ par cet isomorphisme est faiblement fermée, et pour cela que $\mathfrak{A}$ coïncide avec l'ensemble $\mathfrak{A}'$ des opérateurs de H qui permutent avec ceux de $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$ est immédiat. Soit $A' \in \mathfrak{A}'$. Parmi les opérateurs de $\mathfrak{A}$ se trouvent les projecteurs sur les H_i, qui correspondent aux fonctions caractéristiques des E_i. Donc A' est réduit par les H_i Soit A'_i la partie induite par A' dans H_i. A'_i permute avec les opérateurs de $\mathfrak{A}_i$, donc est dans $\mathfrak{A}_i$, donc correspond à une fonction continue f_i sur E_i. Et il existe une $f \in C(E)$ dont les restrictions aux E_i soient les f_i (n.° 1, b), telle par suite que $A' = A^f$.

Réciproquement, soit $\mathfrak{A}$ une algèbre autoadjointe commutative faiblement fermée d'opérateurs sur un espace hilbertien H. Il est bien connu que toute famille $(A_i)_{i \in I}$ majorée filtrante croissante d'opérateurs hermitiens de $\mathfrak{A}$ admet une borne supérieure A dans $\mathfrak{A}$. De plus, si $x \in H, < Ax, x >$ est la borne supérieure des $< A_i x, x >$. Il en résulte d'abord que le spectre E de A est stonien. De plus, les formes linéaires positives $A \to < Ax, x >$ sur $\mathfrak{A}$ définissent des mesures positives normales sur E. Ceci entraîne que E est hyperstonien. Car soit G une partie non vide, ouverte et fermée, de E. Sa fonction caractéristique, continue, correspond à un projecteur $\mathrm{E} \neq 0$ de $\mathfrak{A}$. Soit $x_0 \in H$, tel que $< \mathrm{E} x_0, x_0 > \neq 0$. La forme $A \to <Ax_0, x_0>$ définit une mesure positive normale μ sur E telle que $\mu(G) \neq 0$; donc le support de μ n'est pas disjoint de G.

Il reste à achever la détermination des mesures normales sur E, ou plutôt des formes linéaires correspondantes sur $\mathfrak{A}$. D'après ce qui précède, les formes $A \to \sum_{i=1}^{n} <Ax_i, y_i>$ (où $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ sont des vecteurs fixes de H) sont de telles formes, ainsi par conséquent que les limites de ces formes suivant la norme dans l'espace $\mathfrak{A}^*$ dual de $\mathfrak{A}$. Dans $\mathfrak{A}^*$, nous obtenons ainsi un sous-espace vectoriel fermé V, contenu dans le sous-espace V' de toutes les formes qui correspondent aux mesures normales. Il s'agit de prouver que $V = V'$. Or $\mathfrak{A}$ est le dual de V' d'après le corollaire du th. 1, et le dual de V d'après le n.° 1, *d*. D'où le résultat annoncé, d'après le n.° 1, *c*.

PROPOSITION 12 — *Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre autoadjointe commutative faiblement fermée dans un espace hilbertien H. Pour que le spectre E de $\mathfrak{A}$ soit de genre dénombrable, il faut et il suffit que toute famille de projecteurs non nuls deux à deux orthogonaux de $\mathfrak{A}$ soit au plus dénombrable. Cette condition est en particulier toujours remplie quand H est séparable.*

La démonstration est immédiate puisque les projecteurs de $\mathfrak{A}$, opérateurs idempotents, correspondent aux fonctions caractéristiques des parties ouvertes et fermées de E.

PROPOSITION 13 — *Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre autoadjointe commutative faiblement fermée dans un espace hilbertien H. Soit C un ensemble de vecteurs de H tel que, pour tout projecteur non nul* E *de $\mathfrak{A}$ existe un $x \in C$ avec* $\mathrm{E}x \neq 0$. *Les formes linéaires $A \to <Ax, x>$ sur A, où $x \in C$, définissent des mesures normales sur le spectre E de A dont les supports ont une réunion partout dense. Si E est de genre dénombrable, on peut supposer C réduit à un seul vecteur.*(4)

Démonstration — La première partie de la proposition résulte de la démonstration du th. 2. Soit maintenant y un vecteur non nul de H. Considérons les projecteurs E de $\mathfrak{A}$ tels que $\mathrm{E}y = 0$,

(4) Des résultats voisins sont signalés dans [9] quand H est séparable. Il est aussi fait allusion à des relations entre les algèbres de fonctions bornées et les algèbres d'operateurs qui sont certainement en rapport étroit avec le present travail. AJOUTÉ EN ÉPREUVES: cf I. E. Segal, *Equivalence of measure spaces*, American Journal of Mathematics vol. 73 (1951), pp. 275-313; *Decompositions of operator algebras*, II, Memoirs of the American Mathematical Society no. 9 (1951).

soient E'_y leur borne supérieure et $E_y = 1 - E'_y$. On a $E_y \neq 0$, et, pour tout projecteur non nul $E \in \mathfrak{A}$ tel que $E \leq E_y$ on a $<Ey, y> \neq 0$. Considérons les familles de vecteurs y non nuls de H tels que les projecteurs E_y correspondants soient deux à deux orthogonaux, et soit $(x_i)_{i \in I}$ une telle famille maximale. Pour tout projecteur $E \in \mathfrak{A}$ non nul, on a $Ex_i \neq 0$ pour un i au moins: sinon, soit $y \in H$, $y \neq 0$, tel que $Ey = y$. E_y pourrait être ajouté aux E_{x_i} qui ne formeraient pas une famille maximale. Si E est de genre dénombrable, I est au plus dénombrable. Soit alors $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres > 0 tels que $\sum_{i \in I} a_i^2 < +\infty$, et soit $x = \sum_{i \in I} a_i x_i$. Pour tout projecteur $E \in \mathfrak{A}$, on a $EE_i \neq 0$ pour un $i \in I$, donc $<Ex, x> \geq <Ea_i x_i, a_i x_i> = = a_i^2 <EE_i x_i, x_i> \neq 0$. On peut donc prendre l'ensemble C réduit au vecteur x.

7. Exemples d'espaces stoniens non hyperstoniens

LEMME 4 — *Soit E un espace de Hausdorff. Soit f une fonction numérique bornée* [5] *semi-continue inférieurement sur E. Soit f' la régularisée semi-continue supérieurement de f. On a $f(x) = f'(x)$ sauf sur un ensemble maigre.*

Démonstration — Soit A (resp. A_n) l'ensemble des $x \in E$ tels que $f'(x) - f(x) > 0$ (resp. $f'(x) - f(x) \geq \frac{1}{n}$). On a: $A = \bigcup_n A_n$, et on va voir que chaque A_n est rare. D'abord A_n est fermé parce que $f' - f$ est semi-continue supérieurement. D'autre part, supposons que A_n contienne un ensemble ouvert non vide G. Soit M la borne supérieure de f sur G. Soit x_0 un point de G tel que $f(x_0) > M - \frac{1}{n}$; on a évidemment $f'(x_0) - f(x_0) < \frac{1}{n}$, d'où absurdité.

DÉFINITION 4 — *Considérons les familles $\mathfrak{F}$ de fonctions numériques bornées sur E, possédant les propriétés suivantes:*

a) $\mathfrak{F}$ contient les fonctions semi-continues (inférieurement ou supérieurement) bornées.

(5) Si f n'est pas bornée, le lemme est encore exact, car il suffit de considérer la fonction Arc tg f, mais nous nous limiterons, ici et dans la suite, au cas des fonctions bornées.

b) Si $f_1, f_2, \ldots$ est une suite de fonctions de $\mathfrak{F}$ convergeant en tout point vers une fonction bornée f, on a $f \in \mathfrak{F}$.

La plus petite de ces familles $\mathfrak{F}$ sera appelée la famile des fonctions boréliennes bornées sur E, et sera noté $B(E)$ (6).

LEMME 5 — *Toute fonction borélienne bornée sur E coïncide, sauf sur un ensemble maigre, avec une fonction semi-continue inférieurement* (7).

Démonstration — Soit $\mathfrak{F}'$ la famille des fonctions bornées qui coïncident, sauf sur un ensemble maigre, avec une fonction semi-continue inférieurement. $\mathfrak{F}'$ contient les fonctions semi-continues, inférieurement ou supérieurement (lemme 4). Soit maintenant f_1, $f_2, \ldots$ une suite de fonctions de $\mathfrak{F}'$ convergeant en tout point vers une fonction bornée f. On va prouver que $f \in \mathfrak{F}'$ (ce qui entraînera $\mathfrak{F}' \supset B(E)$). Soient $g_n = \sup(f_n, f_{n+1}, \ldots)$, et $g_{n,p} = \sup(f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+p})$. La fonction g_n est la limite de la suite croissante des $g_{n,p}$ et la fonction f est la limite de la suite décroissante des g_n. Soit $g'_{n,p}$ une fonction semi-continue inférieurement qui coïncide avec $g_{n,p}$ sauf sur un ensemble maigre. Pour n fixe, on peut évidemment supposer que la suite $g'_{n,p}$ est croissante; elle a alors une limite semi-continue inférieurement qui coïncide avec g_n sauf sur un ensemble maigre. Il en résulte (lemme 4) que g_n coïncide sauf sur un ensemble maigre avec une fonction semi-continue supérieurement g'_n, et on peut évidemment supposer que la suite g'_n est décroissante. Donc f coïncide sauf sur un ensemble maigre, avec une fonction semi-continue supérieurement.

Désormais, nous identifions dans $B(E)$ deux fonctions qui coïncident sauf sur un ensemble maigre. L'ensemble quotient sera encore noté $B(E)$ par abus de langage. Cet ensemble est muni d'une structure évidente d'algèbre normée complète commutative

(6) Cette définition diffère légèrement de la définition usuelle. En effet, les fonctions semi-continues, prises ici pour point de départ, ne sont pas toujours boréliennes au sens usuel. Ceci n'a d'ailleurs aucune importance pour la suite. Mais il nous a paru préférable de donner une définition des fonctions boréliennes qui soit telle que les fonctions caractéristiques des ensembles ouverts ou fermés soient boréliennes.

(7) Il résulte du lemme 4 que, pour toute fonction borélienne f, il existe un ensemble maigre A tel que la restriction de f au complémentaire de A soit continue.

à involution, du type considéré au n.° 1. La relation d'ordre correspondante est la relation d'ordre usuelle entre fonctions.

LEMME 6 — *Dans $B(E)$, toute famille majorée admet une borne supérieure.*

Démonstration — Soit $(f_i)_{i\epsilon I}$ une famille majorée de fonctions boréliennes. Soit $(f_i')_{i\epsilon I}$ une famille de fonctions semi-continues inférieurement telles que $f_i'=f_i$ sauf sur un ensemble maigre. Soit f l'enveloppe supérieure, semi-continue inférieurement, des f_i'. On a $f\geq f_i$, sauf sur un ensemble maigre, pour tout i. D'autre part, soit g une fonction borélienne bornée telle que $g\geq f_i$ sauf sur un ensemble maigre, pour tout i. On va prouver, ce qui établira le lemme, que $g\geq f$ sauf sur un ensemble maigre. On peut supposer que g est semi-continue supérieurement, et on a $g\geq f_i'$ sauf sur un ensemble maigre pour tout i. Soit S l'ensemble des x tels que $g(x)<f(x)$. Considérons une famille maximale $(G_\alpha)_{\alpha\epsilon A}$ d'ensembles ouverts non vides de E deux à deux disjoints tels que $S\cap G_\alpha$ soit maigre pour tout $\alpha\in A$. Prouvons que $G=\bigcup_{\alpha\epsilon A}G_\alpha$ est partout dense. Si G n'était pas partout dense, il existerait un ensemble ouvert non vide $G'\subset E$ disjoint de tous les G_α. On a: $G'\cap S\neq\phi$ (sinon, on pourrait ajouter G' à la famille (G_α)). Soit donc $x_0\in G'\cap S$. On a $g(x_0)<f(x_0)$, donc $g(x_0)<f_i'(x_0)$ pour un certain i. Comme g est semi-continue supérieurement et f_i' semi-continue inférieurement, on a encore $g(x)<f_i'(x)$ pour $x\in G''$, où G'' est un voisinage ouvert de x_0 contenu dans G'. Donc G'' est maigre, et on peut ajouter G'' à la famille (G_α), ce qui est absurde. Ceci posé, $\complement G$ est rare, et, à fortiori, $S\cap\complement G$ est rare. Enfin, $S\cap G$ est la réunion des ensembles maigres $S\cap G_\alpha$ contenus dans des ensembles ouverts deux à deux disjoints, donc $S\cap G$ est maigre (cf. démonstration de la prop. 9).

THÉORÈME 3 — *Soit E un espace stonien. Il existe un espace de Hausdorff R tel que le spectre de $B(R)$ soit E.*

Réciproquement, si R est un espace de Hausdorff, le spectre de $B(R)$ est un espace stonien.

Démonstration — Soit E un espace stonien. Le lemme 5 et le n.° 1, b, prouvent aussitôt que $B(E)$ est isomorphe, en tant qu'algèbre normée à involution, à $C(E)$. Donc le spectre de $B(E)$ est E. Ceci prouve la première partie du théorème. La deuxième partie résulte aussitôt du lemme 6.

LEMME 7 — *Soit R un espace complètement régulier dans lequel il existe un ensemble maigre partout dense. Il existe alors dans le spectre E de $B(R)$ un ensemble maigre partout dense.*

Démonstration — Par hypothèse, il existe une suite $A_1, A_2, \ldots$ d'ensembles fermés rares dans R tels que $A = \bigcup_n A_n$ soit partout dense dans R. Pour tout n fixé, soit $(A_n^i)_{i \in I_n}$ la famille des ensembles ouverts non vides de R contenant A_n. A la fonction caractéristique de A_n^i correspond une fonction continue sur E qui est égale à son carré, donc qui est la fonction caractéristique d'un ensemble ouvert et fermé B_n^i. Soit $B_n = \bigcap_{i \in I_n} B_n^i$

$a)$ B_n est fermé et rare. Sinon B_n contiendrait un ensemble ouvert et fermé non vide H. A la fonction caractéristique de H correspond une fonction semi-continue inférieurement f sur R, qui est égale à son carré sauf sur un ensemble maigre; on a $f(x) > 0$ sur un ensemble ouvert G, et f est égale à la fonction caractéristique de G sauf sur un ensemble maigre. On a, pour tout $i \in I_n$, $G \subset A_n^i$ à un ensemble maigre près. Et G est non maigre. $G \cap A_n$ est rare, donc $G \cap \complement A_n$ est non maigre, donc il existe un $x \in G \cap \complement A_n$ où G n'est pas maigre. Comme A_n est fermé, il existe un voisinage V de x et un voisinage W de A_n disjoints (car R est complètement régulier). Alors, W est un ensemble A_n^i, et $V \cap G$ est non maigre, donc W ne contient pas G à un ensemble maigre près: contradiction.

$b)$ La réunion des B_n est partout dense dans E. Sinon, il existerait un ensemble ouvert et fermé non vide H dans E disjoint des B_n. Comme précédemment, à cet ensemble H correspondrait dans R un ensemble ouvert G non maigre. Pour chaque n, $\complement H$ contient B_n, donc un $B_n^{i_n}$, donc $\complement G$ contient $A_n^{i_n}$ à un ensemble maigre près; par suite, G contient, à un ensemble maigre près, $\bigcup_n A_n^{i_n}$

qui est un ensemble ouvert partout dense. Donc G est rare: contradiction.

Du lemme 7, on déduit aussitôt des exemples d'espaces stoniens dans lesquels existent des ensembles maigres partout denses. On peut prendre par exemple $R=[0,1]$. Il est d'ailleurs bien connu qu'il n'existe aucune mesure dénombrablement additive sur l'algèbre de Boole des ensembles boréliens de $[0,1]$ modulo les ensembles maigres (pour références, cf. [1]).

Tous les résultats qui suivent sont dus à J. Dieudonné.

LEMME 8 — *Supposons qu'il existe une base B des ensembles ouverts de R possédant la propriété suivante: si $G_1, G_2,\ldots$ est une suite décroissante d'ensembles non vides de B, $\bigcap_n G_n$ contient un ensemble non vide de B. Alors, dans le spectre E de $B(R)$ tout ensemble maigre est rare. De plus, si R n'a pas de points isolés, toute mesure sur E a un support rare.*

Démonstration — Pour prouver que, dans un espace topologique, tout ensemble maigre est rare, il suffit de prouver que, étant donnés une suite $D_1, D_2, \ldots$ d'ensembles ouverts partout denses et un ensemble ouvert non vide D, $\bigcap_n D_n$ possède dans D un point intérieur (ceci entraine en effet que l'intérieur de $\bigcap_n D_n$ est partout dense, donc que $\bigcap_n D_n$ contient un ensemble ouvert partout dense, donc que $\bigcup_n (\complement D_n)$ est rare). Soient donc, dans R, une suite D_1, $D_2,\ldots$ d'ensembles ouverts partout denses, et un ensemble ouvert non vide D. L'ensemble $D_1 \cap D$ est non vide, donc contient un élément non vide D_1' de B; puis $D_2 \cap D_1'$ est non vide, donc contient un élément non vide D_2' de B; etc. On obtient une suite décroisssante $D_1', D_2'\ldots$ d'éléments de B, avec $D_i' \subset D_i \cap D$. Alors un élément non vide de B contenu dans $\bigcap_n D_n'$ est contenu dans $\bigcap_n D_n$ et dans D. Donc, dans R, tout ensemble maigre est rare.

Passons à l'espace E. Soient une suite $H_1, H_2,\ldots$ d'ensembles ouverts partout denses dans E, et H_1' un ensemble ouvert non vide de E. $H_1 \cap H_1'$ est non vide, donc contient un ensemble ouvert et fermé non vide; ce dernier correspond à un ensemble ouvert non vide G_1 de R; G_1 contient un élément non vide A_1 de B; A_1 est non maigre d'après ce qu'on a vu de R, donc correspond dans E à un ensemble ouvert et fermé non vide H_2'. On recommence: $H_2 \cap H_2'$ est non vide, etc.... On détermine deux suites décroissantes A_1, A_2,... et H_1', H_2'... où les A_i sont des éléments non vides de B et où les H_i' sont des ensembles ouverts et fermés de E, avec $H_i' \subset H_{i-1}$, A_i et H_{i+1}' se correspondant. Soit $\overline{A}$ un élément non vide de B contenu dans $\bigcap_n A_n$, et soit $\overline{H}$ un ensemble ouvert et fermé correspondant dans E, non vide car A est non maigre. On a $\overline{H} \subset \bigcap_n H_n$, et $\overline{H} \subset H_1'$. Donc, dans E, tout ensemble maigre est rare.

Si R n'a pas de points isolés, E n'a pas de points isolés. Soit alors μ une mesure sur E, de support S. Soit L_1 un ensemble ouvert et fermé non vide de E. On va montrer que $\complement S$ possède dans L_1 des points intérieurs (donc $\complement S$ sera un ensemble ouvert partout dense, et S sera rare). Dans E, tout ensemble réduit à un point est rare, donc tout ensemble dénombrable est maigre (et par suite rare). Comme l'ensemble des points de μ-mesure >0 est dénombrable, on voit qu'il existe dans L_1 un point x de μ-mesure nulle. Il existe donc un voisinage ouvert et fermé L_1' de x contenu dans L_1 et tel que $\mu(L_1') \leq 1$. En raisonnant comme plus haut, on détermine un $A_2 \in B$ dont le correspondant L_2 dans E est contenu dans L_1'. On recommence. On détermine ainsi deux suites décroissantes A_1, A_2,... et L_1, L_2,... où les A_i sont des éléments non vides de B, et où les L_i sont des ensembles ouverts et fermés de E, L_i et A_i se correspondant, avec $\mu(L_i) \leq \frac{1}{i}$. Soit $\overline{A}$ un élément non vide de B contenu dans $\bigcap_n A_n$, et soit $\overline{L}$ l'ensemble ouvert et fermé non vide correspondant dans E. On a $\overline{L} \subset L_1$ et $\mu(\overline{L}) \leq \frac{1}{i}$ pour tout i, donc $\mu(\overline{L}) = 0$, donc $\overline{L} \subset \complement S$.

Pour obtenir un exemple d'espace stonien non hyperstonien dans lequel tout ensemble maigre est rare, il suffit donc de construire un espace de Hausdorff R sans points isolés dans lequel existe une base des ensembles ouverts possédant la propriété du lemme 8. Les remarques qui suivent à ce sujet se trouvent dans [4] ou sont des conséquences immédiates de [4]. Soit Y l'ensemble des nombres ordinaux de première et de seconde classes, R le groupe additif des fonctions numériques définies sur Y, totalement ordonné par l'ordre lexicographique. En prenant pour voisinages d'un point les intervalles contenant ce point (sans l'admettre pour extrémité), on définit sur R une structure de groupe topologique sans points isolés. Soient $\alpha \in Y$, et x, y des nombres réels $(x<y)$; soit $A_{\alpha,x,y}$ l'ensemble des $f \in R$ tels que $f(\beta)=0$ pour $\beta<\alpha$ et $x<f(\alpha)<y$. Les $A_{\alpha,x,y}$ constituent une base des ensembles ouverts qui possède la propriété du lemme 8.

UNIVERSITÉ DE DIJON
DIJON, FRANCE

Bibliographie

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, 2e ed. New York (1948).

[2] H. Cartan, *Sur les fondements de la théorie du potentiel*, Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 69 (1941), pp. 71-96.

[3] J. Dieudonné, *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym* III, Annales de l'Université de Grenoble, vol. 23 (1947), pp. 25-53.

[4] J. Dieudonné, *Notes de tératopologie* I, Revue Scientifique (Revue Rose), vol. 77 (1939), pp. 39-40.

[5] J. Dixmier, *Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert*, Annals of Mathematics, vol. 51 (1950), pp. 387-408.

[6] I. Gelfand et N. Neumark, *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space*, Recueil Mathématique, vol. 13 (1943), pp. 301-316.

[7] S. Kakutani, *Concrete representations of abstract* (L) – *spaces and the mean ergodic theorem*, Annals of Mathematics, vol. 42 (1941), pp. 523-537.

[8] H. Nakano, *Uber das system aller stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum*, Proceedings of the Imperial Akademy of Tokyo, vol. 17 (1941), pp. 308-310.

[9] I. E. Segal, *The two-sided regular representation of a unimodular locally compact group*, Annals of Mathematics, vol. 51 (1950), pp. 293-298.

[10] M. H. Stone, *A general theory of spectra I*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A., vol. 26 (1940), pp. 280-283.

[11] M. H. Stone, *Boundedness properties in function-lattices*, Canadian Journal of Mathematics, vol. 1 (1949), pp. 176-186.